порядка равны нулю и, следовательно, второй интеграл в (19) равен нулю. На верхнем основании σ_1 имеем

$$\cos(nx) = \cos(ny) = 0, \quad \cos(nt) = 1.$$

На боковой поверхности Γ конуса направляющие косинусы нормали удовлетворяют соотношению

$$\cos^2(nt) - \cos^2(nx) - \cos^2(ny) = 0.$$

Теперь равенство (19) можно переписать в виде

$$\iint_{\Gamma} \frac{1}{\cos(nt)} \left\{ \left[\frac{\partial u}{\partial x} \cos(nt) - \frac{\partial u}{\partial t} \cos(nx) \right]^2 + \right. \\ \left. + \left[\frac{\partial u}{\partial y} \cos(nt) - \frac{\partial u}{\partial t} \cos(ny) \right]^2 \right\} ds + \\ + \iint_{\sigma_1} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \right] ds = 0.$$

На боковой поверхности Γ $\cos(nt) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ и, следовательно, первый интеграл неотрицателен, а потому

$$\iint_{\sigma_1} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \right] ds = 0.$$

Отсюда следует, что во всех точках внутри полного конуса с вершиной $N(x_0, y_0, t_0)$ частные производные первого порядка функции u равны нулю и, следовательно, сама функция $u = \text{const}$. На нижнем основании конуса она равна нулю в силу (18), а следовательно, $u = 0$ в точке $N(x_0, y_0, t_0)$.

§ 5. Неоднородное волновое уравнение

Рассмотрим неоднородное волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + g(x, y, z, t) \tag{20}$$

и будем искать его решение, удовлетворяющее нулевым начальным условиям

$$u|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0. \tag{21}$$

Для решения этой задачи рассмотрим решение однородного уравнения

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right), \tag{22}$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$v|_{t=\tau} = 0, \quad \left. \frac{\partial v}{\partial t} \right|_{t=\tau} = g(x, y, z, \tau), \tag{23}$$

причем за начальный момент времени взято не $t=0$, а $t=\tau$, где τ — некоторый параметр. Решение задачи (22)—(23) будет выражаться формулой Пуассона, но только в этой формуле нужно заменить t на $t-\tau$, поскольку начальным моментом времени является не $t=0$, а $t=\tau$.

Итак, будем иметь

$$v(x, y, z, t; \tau)=$$
$$=\frac{t-\tau}{4\pi}\iint\limits_{S_1} g\left[x+\alpha a(t-\tau),\ y+\beta a(t-\tau),\ \ z+\gamma a(t-\tau)\ \ \tau\right] d\sigma_1.$$

Покажем, что функция $u(x, y, z, t)$, определенная формулой

$$u(x, y, z, t)=\int\limits_0^t v(x, y, z; \tau)\, d\tau, \tag{25}$$

является решением неоднородного волнового уравнения (16) при нулевых начальных условиях (21). Действительно, из формулы (25) находим

$$\Delta u=\int\limits_0^t \Delta v(x, y, z, t; \tau)\, d\tau. \tag{26}$$

Дифференцируя выражение (25) по t, получим

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\int\limits_0^t \frac{\partial v(x, y, z, t; \tau)}{\partial t}\, d\tau+v(x, y, z, t; \tau)\Big|_{\tau=t}. \tag{27}$$

Здесь внеинтегральный член равен нулю в силу первого из условий (23). Дифференцируя еще раз по t, будем иметь

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\int\limits_0^t \frac{\partial^2 u(x, y, z, t; \tau)}{\partial t^2}\, d\tau+\frac{\partial v(x, y, z, t; \tau);}{\partial t}\Big|_{\tau=t},$$

причем внеинтегральный член равен $g(x, y, z, t)$ в силу второго из условий (23), т. е.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\int\limits_0^t \frac{\partial^2 v(x, y, z, t; \tau)}{\partial t^2}\, d\tau+g(x, y, z, t). \tag{28}$$

Из формул (26), (28) и уравнения (22) легко видеть, что функция $u(x, y, z, t)$ удовлетворяет неоднородному уравнению (66). Начальные условия (21) также выполнены, что следует из формул (25) и (27).

Подставив в формулу (25) вместо функции $v(x, y, z, t; \tau)$ ее выражение (24), получим:

$$u(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi} \int_0^t (t-\tau) \left\{ \iint_{S_1} g\left[x + \alpha a(t-\tau),\right.\right.$$

$$\left.\left. y + \beta a(t-\tau),\ z + \gamma a(t-\tau),\ \tau\right] d\sigma_1 \right\} d\tau.$$

Введем вместо τ новую переменную интегрирования $r = a(t-\tau)$. Тогда будем иметь

$$u(x, y, z, t) =$$

$$= \frac{1}{4\pi a^2} \int_0^{at} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{g\left(x + \alpha r,\ y + \beta r,\ z + \gamma r,\ t - \frac{r}{a}\right)}{r} r^2 \sin\theta d\theta\, d\varphi\, dr.$$

Введя вместо сферических прямоугольные координаты

$$\xi = x + \alpha r, \quad \eta = y + \beta r, \quad \zeta = z + \gamma r$$

и учитывая, что $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$, получим

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2},$$

и выражение для $u(x, y, z, t)$ окончательно запишется в виде

$$u(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi a^2} \iiint_{D_{at}} \frac{g\left(\xi, \eta, \zeta, t - \frac{r}{a}\right)}{r} d\xi\, d\eta\, d\zeta, \tag{29}$$

где D_{at} — шар радиуса at с центром в точке (x, y, z).

Выражение (29) называют *запаздывающим потенциалом*, так как при выполнении интегрирования функция g берется не в рассматриваемый момент времени t, а в момент времени $t - \frac{r}{a}$, предшествующий t на промежуток времени, который требуется, чтобы процесс, распространяющийся со скоростью a, прошел путь от точки (ξ, η, ζ) до точки (x, y, z).

Совершенно так же, как и выше, мы можем получить решение неоднородного уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + g(x, y, t) \tag{30}$$

с нулевыми начальными условиями

$$u\big|_{t=0} = 0, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0. \tag{31}$$

Это решение получается в виде:

$$u(x, y, t) = \frac{1}{2\pi a} \int_0^t \left[\iint_{\rho \leqslant a(t-\tau)} \frac{g(\xi, \eta, \tau)\, d\xi\, d\eta}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2 - \rho^2}} \right] d\tau, \tag{32}$$

где

$$\rho^2=(x-\xi)^2+(y-\eta)^2.$$

В случае уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+g(x,\ t) \tag{33}$$

решение, удовлетворяющее нулевым начальным условиям, будет, очевидно, следующим:

$$u(x,\ t)=\frac{1}{2a}\int_0^t\left[\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}g(\xi,\ \tau)\,d\xi\right]d\tau. \tag{34}$$

§ 6. Точечный источник

Если мы положим, что свободный член в уравнении (10) отличен от нуля только в небольшой сфере с центром в начале координат, то при стремлении радиуса этой сферы к нулю и при беспредельном возрастании интенсивности внешней силы мы в пределе можем получить решение волнового уравнения при наличии точечного источника, который начинает действовать с момента $t=0$ и закон воздействия которого может быть любым в зависимости от времени. Положим, что

$$f(x,\ y,\ z,\ t)=0 \quad \text{при} \quad \sqrt{x^2+y^2+z^2}\geqslant\varepsilon \tag{35}$$

и

$$\iiint\limits_{D_\varepsilon}f(x,\ y,\ z,\ t)\,dx\,dy\,dz=4\pi a^2\omega(t), \tag{36}$$

где D_ε — шар с центром в начале координат радиуса ε.

Обратимся к формуле (29) и будем считать $at>\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. В силу (35) достаточно произвести интегрирование по шару D_ε. При $\varepsilon\to 0$ величина r будет равна расстоянию от точки $(x,\ y,\ z)$ до начала координат, т. е. $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, и мы получим, учитывая (36),

$$u(x,\ y,\ z,\ t)=\frac{1}{r}\,\omega\left(t-\frac{r}{a}\right) \quad (at>r). \tag{37}$$

При $r>at$ ясно, что $u(x,\ y,\ z,\ t)=0$, так как при $r>at$ область интегрирования в интеграле (29) не содержит внутри себя шара D_ε при достаточно малых ε. Отметим, что функция (37) при любом выборе функции $\omega(t)$ удовлетворяет однородному волновому уравнению (1) и представляет собой сферическую волну, расходящуюся радиально со скоростью a от начала координат.

В случае уравнения (30) мы должны совершенно так же, как и выше, считать

$$f(x,\ y,\ t)=0 \quad \text{при} \quad \sqrt{x^2+y^2}\geqslant\varepsilon$$

$$\iint\limits_{C_\varepsilon}f(x,\ y,\ t)\,dx\,dy=2\pi a\omega(t),$$