где

$$\rho^2=(x-\xi)^2+(y-\eta)^2.$$

В случае уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+g(x, t) \tag{33}$$

решение, удовлетворяющее нулевым начальным условиям, будет, очевидно, следующим:

$$u(x, t)=\frac{1}{2a}\int_0^t\left[\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} g(\xi, \tau)\,d\xi\right]d\tau. \tag{34}$$

§ 6. Точечный источник

Если мы положим, что свободный член в уравнении (10) отличен от нуля только в небольшой сфере с центром в начале координат, то при стремлении радиуса этой сферы к нулю и при беспредельном возрастании интенсивности внешней силы мы в пределе можем получить решение волнового уравнения при наличии точечного источника, который начинает действовать с момента $t=0$ и закон воздействия которого может быть любым в зависимости от времени. Положим, что

$$f(x, y, z, t)=0 \quad \text{при} \quad \sqrt{x^2+y^2+z^2}\geqslant\varepsilon \tag{35}$$

и

$$\iiint_{D_\varepsilon} f(x, y, z, t)\,dx\,dy\,dz=4\pi a^2\omega(t), \tag{36}$$

где D_ε — шар с центром в начале координат радиуса ε.

Обратимся к формуле (29) и будем считать $at>\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. В силу (35) достаточно произвести интегрирование по шару D_ε. При $\varepsilon\to 0$ величина r будет равна расстоянию от точки (x, y, z) до начала координат, т. е. $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, и мы получим, учитывая (36),

$$u(x, y, z, t)=\frac{1}{r}\,\omega\left(t-\frac{r}{a}\right) \quad (at>r). \tag{37}$$

При $r>at$ ясно, что $u(x, y, z, t)=0$, так как при $r>at$ область интегрирования в интеграле (29) не содержит внутри себя шара D_ε при достаточно малых ε. Отметим, что функция (37) при любом выборе функции $\omega(t)$ удовлетворяет однородному волновому уравнению (1) и представляет собой сферическую волну, расходящуюся радиально со скоростью a от начала координат.

В случае уравнения (30) мы должны совершенно так же, как и выше, считать

$$f(x, y, t)=0 \quad \text{при} \quad \sqrt{x^2+y^2}\geqslant\varepsilon$$

$$\iint_{C_\varepsilon} f(x, y, t)\,dx\,dy=2\pi a\omega(t),$$

где C_ε — круг с центром в начале радиуса ε. Обращаясь к формуле (32) и переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим решение для точечного источника на плоскости:

$$u(x, y, t) = \int_0^{t-\frac{\rho}{a}} \frac{\omega(\tau)\, d\tau}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2-\rho^2}} \quad (at > \rho), \tag{38}$$

$$u(x, y, t) = 0 \quad \text{при} \quad at < \rho \quad (\rho = \sqrt{x^2+y^2}).$$

Отметим, что воздействие точечного источника на точку (x, y, z) в момент времени t согласно формуле (37) зависит только от отдельного импульса, возникшего в начале координат в момент времени $t - \frac{r}{a}$ и пришедшего в точку (x, y, z) со скоростью a. В случае же формулы (38) это воздействие определяется действием точечного источника за промежуток времени от нуля до $t - \frac{\rho}{a}$.

Глава IX

НЕКОТОРЫЕ ОБЩИЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

§ 1. Задача Коши. Характеристики

Рассмотрим уравнение гиперболического типа

$$\sum_{i, j=1}^{n} a_{ij}(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i x_j} + F\left(x_1, \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0, \tag{1}$$

где a_{ij} — заданные вещественные функции в некоторой области D n-мерного пространства $(x_1, \ldots, x_n)$. Не ограничивая общности, можно считать $a_{ij} = a_{ji}$.

Пусть в области D задана достаточно гладкая $(n-1)$-мерная поверхность S и в каждой точке этой поверхности некоторая линия l, не касательная к S и достаточно гладко изменяющаяся при движении вдоль S, например нормаль к поверхности.

Пусть далее на поверхности S заданы значения функции $u(x_1, \ldots, x_n)$ и ее производной первого порядка по направлению l. Эти значения на поверхности S называются начальными данными Коши.

Задача Коши для уравнения (1) становится так: найти решение уравнения (1) в некоторой окрестности поверхности S, удовлетворяющее на S начальным данным Коши.