где C_ε — круг с центром в начале радиуса ε. Обращаясь к формуле (32) и переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим решение для точечного источника на плоскости:

$$u(x, y, t) = \int_0^{t-\frac{\rho}{a}} \frac{\omega(\tau)\, d\tau}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2 - \rho^2}} \quad (at > \rho), \tag{38}$$

$$u(x, y, t) = 0 \quad \text{при} \quad at < \rho \quad (\rho = \sqrt{x^2 + y^2}).$$

Отметим, что воздействие точечного источника на точку (x, y, z) в момент времени t согласно формуле (37) зависит только от отдельного импульса, возникшего в начале координат в момент времени $t - \frac{r}{a}$ и пришедшего в точку (x, y, z) со скоростью a. В случае же формулы (38) это воздействие определяется действием точечного источника за промежуток времени от нуля до $t - \frac{\rho}{a}$.

Глава IX

НЕКОТОРЫЕ ОБЩИЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

§ 1. Задача Коши. Характеристики

Рассмотрим уравнение гиперболического типа

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i x_j} + F\left(x_1, \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0, \tag{1}$$

где a_{ij} — заданные вещественные функции в некоторой области D n-мерного пространства $(x_1, \ldots, x_n)$. Не ограничивая общности, можно считать $a_{ij} = a_{ji}$.

Пусть в области D задана достаточно гладкая $(n-1)$-мерная поверхность S и в каждой точке этой поверхности некоторая линия l, не касательная к S и достаточно гладко изменяющаяся при движении вдоль S, например нормаль к поверхности.

Пусть далее на поверхности S заданы значения функции $u(x_1, \ldots, x_n)$ и ее производной первого порядка по направлению l. Эти значения на поверхности S называются начальными данными Коши.

Задача Коши для уравнения (1) становится так: найти решение уравнения (1) в некоторой окрестности поверхности S, удовлетворяющее на S начальным данным Коши.

Начальные данные Коши позволяют определить на поверхности S все частные производные первого порядка функции $u(x_1, \ldots, x_n)$.

Рассмотрим уравнение (1) на самой поверхности S и поставим вопрос: когда дифференциальное уравнение (1) однозначно определяет на поверхности S все производные второго порядка функции $u(x_1, \ldots, x_n)$ через произвольно заданные на S начальные данные Коши.

Начнем рассмотрение нашего вопроса с того случая, когда начальные данные Коши имеют специальную форму

$$u\Big|_{x_1=x_1^0} = \varphi_0(x_2, \ldots, x_n), \quad \frac{\partial u}{\partial x_1}\Big|_{x=x_1^0} = \varphi_1(x_2, \ldots, x_n), \tag{2}$$

т. е. начальные данные заданы на гиперплоскости $x_1 = x_1^0$, а за направление l выбрана нормаль. Начальные данные (2) дают нам возможность определить на гиперплоскости $x_1 = x_1^0$ все производные первого порядка и все производные второго порядка, кроме $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}$. Для определения этой последней производной мы должны воспользоваться самим уравнением (1), положив в нем $x_1 = x_1^0$. Здесь могут представиться два случая:

$$\text{I. } a_{11}(x_1^0, x_2, \ldots, x_n) \neq 0, \quad \text{II. } a_{11}(x_1^0, x_2, \ldots, x_n) = 0.$$

В случае I мы однозначно определим производную $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}$ на гиперплоскости $x_1 = x_1^0$.

В случае II мы или придем к невозможному равенству или получим тождество.

Перейдем теперь к общему случаю, когда начальные данные Коши заданы на некоторой достаточно гладкой поверхности S:

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = 0. \tag{3}$$

В окрестности поверхности S введем новые координаты $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, положив

$$\xi_1 = \varphi(x_1, \ldots, x_n), \quad \xi_i = \omega_i(x_1, \ldots, x_n), \quad (i = 2, 3, \ldots, n) \tag{4}$$

где функции ω_i достаточно гладкие и выбраны так, чтобы якобиан преобразования был отличен от нуля на S. Выразим производные по старым переменным через производные по новым переменным, выписывая лишь те члены, в которые входят интересующие нас производные:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial u}{\partial \xi_1} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \ldots; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \, \partial x_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1^2} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} + \ldots$$

Подставив в уравнение (1), получим

$$\bar{a}_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1^2} + \ldots = 0, \tag{5}$$

где

$$\bar{a}_{11} = \sum_{i,\,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \frac{\partial\varphi}{\partial x_j} \tag{6}$$

и невыписанные члены не содержат производной $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1^2}$. В силу (3) и (4), начальные данные для преобразованного уравнения (5) задаются на гиперплоскости $\xi_1 = 0$, т. е. они имеют указанный выше специальный вид. Следовательно, в новых независимых переменных можно воспользоваться результатами, полученными выше. Принимая во внимание (6), мы можем, таким образом, утверждать, что для того, чтобы начальные данные Коши на поверхности $S: \varphi(x_1, \ldots, x_n) = 0$ совместно с дифференциальным уравнением (1) приводили к несовместности или неопределенности при нахождении вторых производных функции u на S, необходимо и достаточно, чтобы функция $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ удовлетворяла условию

$$\sum_{i,\,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \frac{\partial\varphi}{\partial x_j} = 0, \tag{7}$$

причем это условие должно быть удовлетворено при $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = 0$, т. е., иначе говоря, в силу уравнения (3).

Поверхность $\varphi(x_1', \ldots, x_n) = 0$ называется *характеристической поверхностью* уравнения (1) или просто *характеристикой*, если в каждой точке этой поверхности имеет место равенство (7).

Подчеркнем, что хотя условие (7) имеет внешний вид уравнения в частных производных первого порядка относительно φ, оно по своему определению еще не является таковым. В самом деле функция $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ не обязана тождественно удовлетворять уравнению (7); по определению, она должна удовлетворять уравнению (7) только при $\varphi = 0$, т. е. в каждой точке характеристической поверхности S. Потребуем теперь, чтобы условие (7) выполнялось не только при $\varphi = 0$, но и тождественно относительно $x_1, \ldots, x_n$. Тогда условие (7) будет представлять собой обычное уравнение в частных производных первого порядка, и всякое его решение, отличное от постоянной, будет давать не одну характеристику, а целое семейство характеристик

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = C, \tag{8}$$

где C — произвольная постоянная. Наоборот, для того чтобы уравнение (8) определяло семейство характеристик при произвольной постоянной C, необходимо и достаточно, чтобы функция $\varphi(x_1 \ldots, x_n)$ удовлетворяла уравнению (7). Можно показать, что всякую характеристику уравнения (1) можно включить в семейство вида (8) и что, таким образом, решения уравнения (7) определяют все характеристические поверхности.

В качестве примера такого включения рассмотрим волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \qquad (9)$$

и конус $\chi=t^2-x^2-y^2=0$. Уравнение (7) имеет вид

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2=0. \qquad (10)$$

Это уравнение при $\varphi=\chi=0$ удовлетворяется, так как

$$4t^2-4x^2-4y^2=4(t^2-x^2-y^2)=4\chi=0.$$

Отсюда следует, что конус $\chi=0$ является характеристической поверхностью уравнения (9), тогда как поверхности $\chi=C$ при $C\neq 0$ уже не являются характеристическими поверхностями. Конус $\chi=0$ можно включить в семейство конусов

$$\varphi=t-\sqrt{x^2+y^2}=C.$$

Действительно, нетрудно видеть, что φ удовлетворяет уравнению (10) и, следовательно, все поверхности семейства $\varphi(t, x, y)=C$ являются характеристическими поверхностями уравнения (9).

Уравнение (7) называется *уравнением характеристик* дифференциального уравнения (1).

Если поверхность $S:\varphi(x_1, \ldots, x_n)=0$ такова, что ни в одной ее точке равенство (7) не выполняется, то все вторые производные от искомой функции u на S однозначно определяются начальными данными Коши и дифференциальным уравнением (1). Если же S — характеристическая поверхность уравнения (1), то на этой поверхности уравнение (1) представляет собой некоторое дополнительное ограничение, наложенное на начальные данные Коши. Действительно, функции $u(x_1, \ldots, x_n)$ и ее частные производные первого порядка на S выражаются через такие же величины на гиперплоскости $\xi_1=0$ и наоборот. Пусть

$$u/_{\xi_1=0}=\overline{\varphi_0}(\xi_2, \ldots \xi_n), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial \xi_1}\right|_{\xi_1=0}=\overline{\varphi_1}(\xi_2, \ldots, \xi_n). \qquad (11)$$

Если S есть характеристическая поверхность, то в преобразованном уравнении (5) $\overline{a_{11}}=0$ при $\xi_1=0$ и мы имеем уравнение

$$\sum_{i,j=2}^{n}\overline{a}_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial\xi_i\,\partial\xi_j}+2\sum_{j=2}^{n}\overline{a_{1j}}\frac{\partial^2 u}{\partial\xi_1\,\partial\xi_j}+\ldots=0 \text{ при } \xi_1=0,$$

где невыписанные члены содержат лишь производные первого порядка.

Или, в силу (11),

$$\sum_{i,j=2}^{n}\overline{a_{ij}}\frac{\partial^2\overline{\varphi}_0}{\partial\xi_i\,\partial\xi_j}+2\sum_{j=2}^{n}\overline{a_{1j}}\frac{\partial\overline{\varphi}_1}{\partial\xi_j}+\ldots=0 \quad \text{при } \xi_1=0.$$

Это соотношение не приводится, вообще говоря, к тождеству относительно $\bar{\varphi}_0$ и $\bar{\varphi}_1$. Таким образом $\bar{\varphi}_0$ и $\bar{\varphi}_1$ не являются независимыми функциями. Отсюда следует, что на характеристической поверхности S нельзя задавать произвольно начальные данные Коши.

Отметим, что если $S: \varphi(x_1, \ldots, x_n) = 0$ не характеристическая поверхность уравнения (1), то из изложенного выше следует, что совершая замену переменных (4), мы можем переписать уравнение (1) в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1^2} = \sum_{i, j=2}^{n} b_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_i \partial \xi_j} + \sum_{i=2}^{n} b_{1i} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1 \partial \xi_i} + \ldots,$$

причем поверхность S переходит в гиперплоскость $\xi_1 = 0$. Это дает возможность преобразовать задачу Коши с начальными данными на поверхности S в задачу Коши с начальными данными на гиперплоскости $\xi_1 = 0$.

§ 2. Бихарактеристики

В § 1 мы отметили, что любая характеристическая поверхность $\varphi = 0$ уравнения (1) может быть включена в семейство характеристических поверхностей $\varphi = C$. Поэтому без ограничения общности можно предполагать, что такое включение уже произведено. Тогда функция φ удовлетворяет уравнению (7), которое надо понимать как дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка. Напишем соответствующую этому уравнению характеристическую систему (см гл. III, § 3). Уравнение (7) не содержит явно неизвестную функцию φ и поэтому в соответствующей характеристической системе мы не будем выписывать того отношения, которое содержит $d\varphi$. Таким образом, мы получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_k}{ds} = 2\sum_{j=1}^{n} a_{kj} p_j; \quad \left(p_j = \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right), \tag{11}$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n)$$

$$\frac{dp_k}{ds} = -\sum_{ij=1}^{n} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} p_i p_j, \tag{12}$$

где s — некоторый вспомогательный параметр. Любое решение системы (11)—(12) должно удовлетворять дополнительному условию $\sum_{i, j=1}^{n} a_{ij} p_i p_j = 0$ (см гл. III, § 3). Нетрудно видеть, что равенство (8): $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = C$ есть первый интеграл системы (11).