Это соотношение не приводится, вообще говоря, к тождеству относительно $\overline{\varphi}_0$ и $\overline{\varphi}_1$. Таким образом $\overline{\varphi}_0$ и $\overline{\varphi}_1$ не являются независимыми функциями. Отсюда следует, что на характеристической поверхности S нельзя задавать произвольно начальные данные Коши.

Отметим, что если $S: \varphi(x_1, \ldots, x_n) = 0$ не характеристическая поверхность уравнения (1), то из изложенного выше следует, что совершая замену переменных (4), мы можем переписать уравнение (1) в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1^2} = \sum_{i,\, j=2}^{n} b_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_i \, \partial \xi_j} + \sum_{i=2}^{n} b_{1i} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1 \, \partial \xi_i} + \ldots,$$

причем поверхность S переходит в гиперплоскость $\xi_1 = 0$. Это дает возможность преобразовать задачу Коши с начальными данными на поверхности S в задачу Коши с начальными данными на гиперплоскости $\xi_1 = 0$.

§ 2. Бихарактеристики

В § 1 мы отметили, что любая характеристическая поверхность $\varphi = 0$ уравнения (1) может быть включена в семейство характеристических поверхностей $\varphi = C$. Поэтому без ограничения общности можно предполагать, что такое включение уже произведено. Тогда функция φ удовлетворяет уравнению (7), которое надо понимать как дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка. Напишем соответствующую этому уравнению характеристическую систему (см гл. III, § 3). Уравнение (7) не содержит явно неизвестную функцию φ и поэтому в соответствующей характеристической системе мы не будем выписывать того отношения, которое содержит $d\varphi$. Таким образом, мы получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_k}{ds} = 2 \sum_{j=1}^{n} a_{kj} p_j; \quad \left(p_j = \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right), \tag{11}$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n)$$

$$\frac{dp_k}{ds} = - \sum_{ij=1}^{n} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} p_i p_j, \tag{12}$$

где s — некоторый вспомогательный параметр. Любое решение системы (11)—(12) должно удовлетворять дополнительному условию $\sum_{i,\, j=1}^{n} a_{ij} p_i p_j = 0$ (см гл. III, § 3). Нетрудно видеть, что равенство (8): $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = C$ есть первый интеграл системы (11).

Действительно,

$$\frac{d\varphi}{ds}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial s}=2\sum_{i,\ j=1}^{n}a_{ij}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j},$$

а последняя сумма равна тождественно нулю, в силу (7).

Интегральные кривые системы (11), в которой положено $p_j=\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}$, называются *бихарактеристиками* дифференциального уравнения второго порядка (1), соответствующими семейству $\varphi=C$ характеристических поверхностей.

Если при интегрировании системы (11) за начальные значения x_k взять точку, лежащую на некоторой характеристической поверхности $\varphi=C_0$, то вся соответствующая бихарактеристика будет лежать на этой поверхности, т. е. всякая характеристическая поверхность уравнения (1) может быть образована бихарактеристиками.

Если коэффициенты a_{ij} дифференциального уравнения (1) постоянны, то все бихарактеристики суть прямые линии. Действительно, из уравнений (12) непосредственно видно, что p_i суть постоянные, а тогда из уравнений (11) следует, что x_k суть многочлены первой степени от s.

§ 3. Слабый разрыв. Фронт волны

Положим, что существует решение $u(x_1, \ldots, x_n)$ уравнения (1), которое имеет на поверхности S:

$$\varphi(x_1,\ \ldots,\ x_n)=0 \tag{13}$$

разрыв первого рода для некоторых производных второго порядка*, причем само решение и его частные производные первого порядка остаются непрерывными при переходе через поверхность S. Будем рассматривать это решение u по разные стороны от поверхности (13), как два различных решения уравнения (1). Эти решения имеют на этой поверхности одинаковые данные Коши, но различные значения для производных второго порядка. А тогда на основании § 1 непосредственно следует, что поверхность (13) должна быть характеристикой поверхности уравнения (1). К тому же самому результату мы пришли бы, если бы предположили, что не только само решение u и его частные производные первого порядка, но и частные производные второго порядка остаются непрерывными при переходе через поверхность (13), а разрыв первого рода имеет место лишь для производных порядка выше второго.

---

* Мы считаем, что те производные второго порядка, которые могут быть определены только исходя из начальных данных Коши на S, остаются непрерывными при переходе через поверхность S.