Действительно,

$$\frac{d\varphi}{ds}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial s}=2\sum_{i,\ j=1}^{n}a_{ij}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j},$$

а последняя сумма равна тождественно нулю, в силу (7).

Интегральные кривые системы (11), в которой положено $p_j=\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}$, называются *бихарактеристиками* дифференциального уравнения второго порядка (1), соответствующими семейству $\varphi=C$ характеристических поверхностей.

Если при интегрировании системы (11) за начальные значения x_k взять точку, лежащую на некоторой характеристической поверхности $\varphi=C_0$, то вся соответствующая бихарактеристика будет лежать на этой поверхности, т. е. всякая характеристическая поверхность уравнения (1) может быть образована бихарактеристиками.

Если коэффициенты a_{ij} дифференциального уравнения (1) постоянны, то все бихарактеристики суть прямые линии. Действительно, из уравнений (12) непосредственно видно, что p_i суть постоянные, а тогда из уравнений (11) следует, что x_k суть многочлены первой степени от s.

§ 3. Слабый разрыв. Фронт волны

Положим, что существует решение $u(x_1, \ldots, x_n)$ уравнения (1), которое имеет на поверхности S:

$$\varphi(x_1,\ \ldots,\ x_n)=0 \qquad (13)$$

разрыв первого рода для некоторых производных второго порядка*, причем само решение и его частные производные первого порядка остаются непрерывными при переходе через поверхность S. Будем рассматривать это решение u по разные стороны от поверхности (13), как два различных решения уравнения (1). Эти решения имеют на этой поверхности одинаковые данные Коши, но различные значения для производных второго порядка. А тогда на основании § 1 непосредственно следует, что поверхность (13) должна быть характеристикой поверхности уравнения (1). К тому же самому результату мы пришли бы, если бы предположили, что не только само решение u и его частные производные первого порядка, но и частные производные второго порядка остаются непрерывными при переходе через поверхность (13), а разрыв первого рода имеет место лишь для производных порядка выше второго.

---

* Мы считаем, что те производные второго порядка, которые могут быть определены только исходя из начальных данных Коши на S, остаются непрерывными при переходе через поверхность S.

Вообще говорят, что решение уравнения второго порядка (1) имеет на поверхности (13) *слабый разрыв*, если при переходе через эту поверхность решение u и его первые производные остаются непрерывными, а некоторые производные порядка выше первого имеют на поверхности (13) разрыв первого рода.

Из предыдущих рассуждений следует, что поверхностью слабого разрыва может быть только характеристическая поверхность.

В уравнениях математической физики одна из независимых переменных, а именно время, играет исключительную роль по сравнению с остальными переменными, которые обычно представляют пространственные координаты. В дальнейшем будем обозначать $x_n = t$, а пространственные координаты через $x_1, \ldots, x_m$, т. е. будем считать $n = m+1$. Решение u уравнения (1) будем рассматривать как функцию точки в m-мерном пространстве R_m с координатами $x_1, \ldots, x_m$, зависящую от времени как от параметра. Тогда вместо поверхности (13) будем иметь движущуюся поверхность слабого разрыва в пространстве R_m:

$$\varphi(x_1, \ldots, x_m, t) = 0$$

или в разрешенном относительно t виде:

$$t = \omega(x_1, \ldots, x_m). \tag{14}$$

Поверхность $\omega(x_1, \ldots, x_m) = t = \text{const}$ в пространстве R_m будем называть «фронтом волны». С течением времени фронт волны перемещается в направлении вектора $\operatorname{grad}\omega$. Определим величину скорости перемещения фронта волны. Возьмем некоторую точку M на поверхности (14) и проведем из нее нормаль $\mathbf{n}$ к поверхности в направлении вектора $\operatorname{grad}\omega$. Фронт волны в момент времени $t+\Delta t$ пересечет нормаль $\mathbf{n}$ в некоторой точке M_1, отстоящей от точки M на расстоянии Δn. Предел отношения $\frac{\Delta n}{\Delta t}$ при $t \to 0$ называется скоростью движения фронта волны. Имеем

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta n}{\Delta t} = \lim_{\Delta n \to 0} \frac{1}{\frac{\Delta t}{\Delta n}} = \lim_{\Delta n \to 0} \frac{1}{\frac{\Delta \omega}{\Delta n}} = \frac{1}{|\operatorname{grad}\omega|} \tag{15}$$

и, следовательно, вектор скорости движения фронта волны определяется формулой

$$\mathbf{w} = \frac{\operatorname{grad}\omega}{|\operatorname{grad}\omega|^2}. \tag{16}$$

В случае $m = 2$ фронтом волны будет линия на плоскости (x_1, x_2). Рассмотрим в качестве примера волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right) = 0.$$

Уравнение (7) запишется при этом в виде

$$\varphi_t^2 - a^2(\varphi_{x_1}^2 + \varphi_{x_2}^2) = 0. \tag{17}$$

Подставив левую часть уравнения $\varphi = t - \omega(x_1, x_2)$ в уравнение (17), получим

$$a^2(\omega_{x_1}^2 + \omega_{x_2}^2) = 1 \text{ или } |\operatorname{grad}\omega|^2 = \frac{1}{a^2}.$$

Следовательно, скорость движения фронта волны будет равна a, т е. всякая характеристическая кривая на плоскости (x_1, x_2) должна двигаться со скоростью a.

Рассмотрим далее важный частный случай уравнения (1):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{i, j=1}^{m} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = f(x_1, \ldots, x_m, t), \tag{18}$$

где коэффициенты $a_{ij} = a_{ji}$ зависят только от переменных $x_1, \ldots, x_m$, причем квадратичная форма $\sum\limits_{i, j=1}^{m} a_{ij}\xi_i\xi_j$ положительно определенная.

Уравнение характеристик (7) в данном случае будет иметь вид:

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2 - \sum_{i, j=1}^{m} a_{ij}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j} = 0. \tag{19}$$

Пусть $\varphi = t - \omega(x_1, \ldots, x_m)$ — характеристическая поверхность уравнения (18). Подставив левую часть уравнения $t - \omega = 0$ в уравнение (19), получим следующее уравнение для функции ω

$$\sum_{i, j=1}^{m} a_{ij}p_i p_j = 1, \quad p_i = \frac{\partial\omega}{\partial x_i}. \tag{20}$$

Это уравнение должно быть выполнено, строго говоря, в силу $t = \omega$. Но оно вовсе не содержит t и, следовательно, оно должно быть выполнено тождественно. Соответствующая уравнению (20) характеристическая система имеет вид:

$$\frac{dx_k}{2\sum\limits_{j=1}^{m} a_{kj}p_j} = \frac{d\omega}{2\sum\limits_{i,j=1}^{m} a_{ij}p_i p_j} = \frac{dp_k}{-\sum\limits_{i, j=1}^{m}\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}p_i p_j}. \tag{21}$$

Если мы возьмем некоторую конкретную характеристическую поверхность $t - \omega(x_1, \ldots, x_m) = 0$, то из (20) и (21) следует, что образующие ее бихарактеристики должны удовлетворять следующей системе

$$\frac{dx_k}{dt} = \sum_{i=1}^{m} a_{kj}p_j \quad (k = 1, 2, \ldots, m). \tag{22}$$

Здесь роль вспомогательного параметра s, введенного в § 2, играет время t. Решения системы (22), рассматриваемые в пространстве R_m суть линии λ, определяемые параметрически при помощи параметра t. При этом, конечно, в пространстве R_m линии λ не будет уже находиться на движущейся поверхности $t-\omega(x_1, \ldots, x_m)=0$.

Линии λ в пространстве R_m называются *лучами*.

Учитывая уравнение (20) из системы (22), имеем

$$\sum_{i=1}^{m} p_i \frac{dx_i}{dt} = \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij} p_i p_j = 1.$$

Это равенство означает, что лучи пересекают фронт волны $\omega(x_1,\ldots,x_m)=t$. Вектор $\mathbf{v}$ с компонентами $\frac{dx_k}{dt}=\sum_{j=1}^{m} a_{kj}p_j$ $(k=1,2,\ldots,m)$ в пространстве R_m называется вектором лучевой скорости. Если $t=\omega(x_1, \ldots, x_m)$ есть поверхность слабого разрыва, то вектор лучевой скорости представляет собой скорость распространения слабых разрывов в направлении лучей.

Скорость по направлению нормали (скорость фронта волны) и скорость по направлению луча (лучевая скорость) связаны соотношениями

$$v_k = \sum_{j=1}^{m} a_{kj} w_j \,|\operatorname{grad}\omega|^2 \quad (k=1, 2, \ldots, m). \tag{23}$$

Для волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_m^2}\right)$$

скорость «фронта волны» и лучевая скорость совпадают по направлению и величине.

В связи с данным выше определением фронта волны подчеркиваем еще раз, что фронт волны является не решением уравнения (1), а лишь поверхностью возможных разрывов решения $u(x_1, \ldots, x_m, t)$.

§ 4. Распространение разрывов по лучам

Пусть $t-\omega(x_1, \ldots, x_m)=0$ есть поверхность слабого разрыва решения u уравнения (1). Чтобы охарактеризовать поведение разрывов решения при их распространении вдоль лучей, обратимся снова к уравнению (18). Введем новые независимые переменные

$$\xi = t-\omega(x_1, \ldots, x_m), \ \xi_i = x_i \quad (i=1, 2, \ldots, m).$$