Здесь роль вспомогательного параметра s, введенного в § 2, играет время t. Решения системы (22), рассматриваемые в пространстве R_m суть линии λ, определяемые параметрически при помощи параметра t. При этом, конечно, в пространстве R_m линии λ не будет уже находиться на движущейся поверхности $t-\omega(x_1, \ldots, x_m)=0$.

Линии λ в пространстве R_m называются *лучами*.

Учитывая уравнение (20) из системы (22), имеем

$$\sum_{i=1}^{m} p_i \frac{dx_i}{dt} = \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij} p_i p_j = 1.$$

Это равенство означает, что лучи пересекают фронт волны $\omega(x_1, \ldots, x_m)=t$. Вектор $\mathbf{v}$ с компонентами $\frac{dx_k}{dt} = \sum_{j=1}^{m} a_{kj} p_j$ $(k=1,2,\ldots,m)$ в пространстве R_m называется вектором лучевой скорости. Если $t=\omega(x_1, \ldots, x_m)$ есть поверхность слабого разрыва, то вектор лучевой скорости представляет собой скорость распространения слабых разрывов в направлении лучей.

Скорость по направлению нормали (скорость фронта волны) и скорость по направлению луча (лучевая скорость) связаны соотношениями

$$v_k = \sum_{j=1}^{m} a_{kj} w_j \, |\operatorname{grad} \omega|^2 \quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ m). \tag{23}$$

Для волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_m^2} \right)$$

скорость «фронта волны» и лучевая скорость совпадают по направлению и величине.

В связи с данным выше определением фронта волны подчеркиваем еще раз, что фронт волны является не решением уравнения (1), а лишь поверхностью возможных разрывов решения $u(x_1, \ldots, x_m, t)$.

§ 4. Распространение разрывов по лучам

Пусть $t-\omega(x_1, \ldots, x_m)=0$ есть поверхность слабого разрыва решения u уравнения (1). Чтобы охарактеризовать поведение разрывов решения при их распространении вдоль лучей, обратимся снова к уравнению (18). Введем новые независимые переменные

$$\xi = t - \omega(x_1, \ldots, x_m), \quad \xi_i = x_i \quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ m).$$

Тогда уравнение (18) запишется в виде:

$$\left(1-\sum_{i,\,j=1}^{m} a_{ij}p_ip_j\right)\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+2\sum_{i,\,j=1}^{m} a_{ij}p_j\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\xi_i}+A\frac{\partial u}{\partial\xi}+\ldots=f, \quad (24)$$

где

$$A=\sum_{i,\,j=1}^{m} a_{ij}\frac{\partial^2\omega}{\partial x_i\,\partial x_j}+\sum_{i=1}^{m} a_i\frac{\partial\omega}{\partial x_i}, \quad (25)$$

а невыписанные члены не содержат производных по ξ. На характеристической поверхности $\xi=t-\omega(x_1, \ldots, x_m)$ уравнение (24), в силу (20), принимает следующий вид

$$2\sum_{i,\,j=1}^{m} a_{ij}p_j\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\xi_i}+A\frac{\partial u}{\partial\xi}+\ldots=f. \quad (26)$$

Отметим, что коэффициент $\left(1-\sum_{i,\,j=1}^{m} a_{ij}p_ip_j\right)$ при $\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}$ в уравнении (24) обращается в нуль не только на характеристической поверхности $\xi=t-\omega=0$, но и на поверхностях $\xi=t-\omega=C$, поскольку последние поверхности являются характеристическими. Поэтому на этих характеристических поверхностях $\xi=t-\omega=C$ мы имеем равенство (26).

Принимая во внимание уравнение (22), первое слагаемое в уравнении (26) можно записать в виде:

$$2\sum_{i,\,j=1}^{m} a_{ij}p_j\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\xi_i}=2\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\xi_i}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}p_j=$$

$$=2\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\xi_i}\frac{dx_i}{dt}=2\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial\xi}=2\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial s}{\partial t},$$

где $\frac{\partial}{\partial s}$ — производная в направлении луча. Учитывая это, уравнение (26) можно записать в виде:

$$2\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial\xi}+A\frac{\partial u}{\partial\xi}+\ldots=f. \quad (27)$$

Продифференцируем теперь уравнение (27) по ξ и рассмотрим полученное таким образом уравнение в двух точках P_1 и P_2, лежащих на одном луче, но по разные стороны характеристической поверхности $\xi=t-\omega=0$. Вычтем одно из этих уравнений из другого и устремим точки P_1 и P_2 к точке P, лежащей на том же луче на поверхности $\xi=0$. В результате* получим так называемое *уравнение распространения разрывов*

$$2\frac{\partial \mu}{\partial t}+A\mu+0, \tag{28}$$

где $\mu=\left[\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\right]$ — скачок второй производной $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}$ при переходе через поверхность слабого разрыва $t=\omega(x_1, \ldots, x_m)$, а величина A, определенная равенством (25), известна на поверхности слабого разрыва и, следовательно, на бихарактеристиках, а значит, и на лучах. Уравнение (28) имеет вид обыкновенного дифференциального уравнения и показывает, что величина скачка не может обратиться в нуль ни в одной точке луча, если он где-нибудь на нем отличен от нуля.

Глава X

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ФУРЬЕ К ИЗУЧЕНИЮ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ СТРУН И СТЕРЖНЕЙ

§ 1. Метод Фурье для уравнения свободных колебаний струны

Метод Фурье или *метод разделения переменных* является одним из наиболее распространенных методов решения уравнений с частными производными. Мы изложим этот метод на ряде примеров, начав с простейшей задачи о колебаниях однородной струны, закрепленной на концах. Эта задача, как было показано выше, сводится к решению уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1}$$

при граничных условиях

$$u|_{x=0}=0, \quad u|_{x=l}=0 \tag{2}$$

и начальных условиях

$$u|_{t=0}=f(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=F(x) \quad (0\leqslant x\leqslant l). \tag{3}$$

* Как и в § 3, предполагаем, что вторая производная $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}$ имеет разрыв первого рода при переходе через поверхность $\xi=t-\omega=0$, в то время как функция u, ее первые производные, а также вторые производные $u_{\xi\xi_i}(i=1,2,\ldots,m)$ остаются непрерывными при переходе через эту поверхность.