же луче на поверхности $\xi=0$. В результате* получим так называемое *уравнение распространения разрывов*

$$2\frac{\partial\mu}{\partial t}+A\mu+0, \tag{28}$$

где $\mu=\left[\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}\right]$ — скачок второй производной $\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}$ при переходе через поверхность слабого разрыва $t=\omega(x_1, \ldots, x_m)$, а величина A, определенная равенством (25), известна на поверхности слабого разрыва и, следовательно, на бихарактеристиках, а значит, и на лучах. Уравнение (28) имеет вид обыкновенного дифференциального уравнения и показывает, что величина скачка не может обратиться в нуль ни в одной точке луча, если он где-нибудь на нем отличен от нуля.

Глава X

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ФУРЬЕ К ИЗУЧЕНИЮ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ СТРУН И СТЕРЖНЕЙ

§ 1. Метод Фурье для уравнения свободных колебаний струны

Метод Фурье или *метод разделения переменных* является одним из наиболее распространенных методов решения уравнений с частными производными. Мы изложим этот метод на ряде примеров, начав с простейшей задачи о колебаниях однородной струны, закрепленной на концах. Эта задача, как было показано выше, сводится к решению уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1}$$

при граничных условиях

$$u|_{x=0}=0, \quad u|_{x=l}=0 \tag{2}$$

и начальных условиях

$$u|_{t=0}=f(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=F(x) \quad (0\leqslant x\leqslant l). \tag{3}$$

---

* Как и в § 3, предполагаем, что вторая производная $\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}$ имеет разрыв первого рода при переходе через поверхность $\xi=t-\omega=0$, в то время как функция u, ее первые производные, а также вторые производные $u_{\xi\xi_i}$ $(i=1,2,\ldots,m)$ остаются непрерывными при переходе через эту поверхность.

Будем сначала искать частные решения уравнения (1), не равные тождественно нулю, в виде произведения

$$u(x,\ t)=X(x)\,T(t), \tag{4}$$

удовлетворяющие граничным условиям (2).

Подставив (4) в уравнение (1), получим

$$T''(t)\,X(x)=a^2\,T(t)\,X''(x)$$

или

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}. \tag{5}$$

Последнее равенство, левая часть которого зависит только от t, а правая — только от x, возможно лишь в том случае, если обе части его не зависят ни от x, ни от t, т. е. представляют собой одну и ту же постоянную. Обозначим эту постоянную через $-\lambda$. Тогда из равенства (5) получим два обыкновенных дифференциальных уравнения

$$T''(t)+a^2\lambda T(t)=0, \tag{6}$$

$$X''(x)+\lambda X(x)=0. \tag{7}$$

Чтобы получить нетривиальные, т. е. не равные тождественно нулю, решения вида (4), удовлетворяющие граничным условиям (2), необходимо найти нетривиальные решения уравнения (7), удовлетворяющие граничным условиям

$$X(0)=0, \quad X(l)=0. \tag{8}$$

Таким образом, приходим к следующей задаче: найти такие значения параметра λ, при которых существуют нетривиальные решения уравнения (7), удовлетворяющие граничным условиям (8).

Те значения параметра λ, при которых задача (7)—(8) имеет нетривиальные решения, называются *собственными числами* (*или значениями*), а сами эти решения — *собственными функциями*.

Найдем собственные значения и собственные функции задачи (7)—(8). Здесь нужно рассмотреть отдельно три случая, когда $\lambda<0$, $\lambda=0$ и $\lambda>0$.

1. При $\lambda<0$ общее решение уравнения (7) имеет вид

$$X(x)=C_1e^{\sqrt{-\lambda}x}+C_2e^{-\sqrt{-\lambda}x}.$$

Удовлетворяя граничным условиям (8), получим

$$C_1+C_2=0, \quad C_1e^{\sqrt{-\lambda}l}+C_2e^{-\sqrt{-\lambda}l}=0. \tag{9}$$

Так как определитель системы (9) отличен от нуля, то $C_1=0$ и $C_2=0$. Следовательно, $X(x)\equiv 0$.

2. При $\lambda=0$ общее решение уравнения (7) имеет вид

$$X(x)=C_1+C_2x.$$

Граничные условия (8) дают

$$C_1 + C_2 \cdot 0 = 0, \quad C_1 + C_2 l = 0.$$

Отсюда $C_1 = 0$, $C_2 = 0$ и, следовательно, $X(x) \equiv 0$.

3. При $\lambda > 0$ общее решение уравнения (7) имеет вид

$$X(x) = C_1 \cos \sqrt{\lambda} x + C_2 \sin \sqrt{\lambda} x.$$

Удовлетворяя граничным условиям (8), получим

$$C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0 = 0, \quad C_1 \cos \sqrt{\lambda} l + C_2 \sin \sqrt{\lambda} l = 0.$$

Из первого уравнения следует $C_1 = 0$, а из второго — $C_2 \sin \sqrt{\lambda} l = 0$. Мы должны считать $C_2 \neq 0$, ибо в противном случае $X(x) \equiv 0$. Поэтому $\sin \sqrt{\lambda} l = 0$, т. е. $\sqrt{\lambda} = \frac{k\pi}{l}$, где k — любое целое число.

Следовательно, нетривиальные решения задачи (7)—(8) возможны лишь при значениях

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 \quad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Этим *собственным числам* соответствуют *собственные функции*

$$X_k(x) = \sin \frac{k\pi x}{l},$$

определяемые с точностью до постоянного множителя, который мы положили равным единице.

Заметим, что положительные и отрицательные значения k, равные по абсолютной величине, дают собственные функции, отличающиеся лишь постоянным множителем. Поэтому достаточно для k брать только целые положительные значения.

При $\lambda = \lambda_k$ общее решение уравнения (6) имеет вид

$$T_k(t) = a_k \cos \frac{k\pi a t}{l} + b_k \sin \frac{k\pi a t}{l},$$

где a_k и b_k — произвольные постоянные.

Таким образом, функции

$$u_k(x, t) = X_k(x) T_k(t) = \left(a_k \cos \frac{k\pi a t}{l} + b_k \sin \frac{k\pi a t}{l}\right) \sin \frac{k\pi x}{l}$$

удовлетворяют уравнению (1) и граничным условиям (2) при любых a_k и b_k.

В силу линейности и однородности уравнения (1) всякая конечная сумма решений будет также решением. То же справедливо и для ряда

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi a t}{l} + b_k \sin \frac{k\pi a t}{l}\right) \sin \frac{k\pi x}{l}, \tag{10}$$

если он сходится и его можно дважды почленно дифференцировать по x и t. Поскольку каждое слагаемое в ряде (10) удовлетворяет граничным условиям (2), то этим условиям будет удовлетворять и сумма ряда, т. е. функция $u(x, t)$. Остается определить постоянные a_k и b_k так, чтобы удовлетворялись и начальные условия (3).

Продифференцируем ряд (10) по t:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\pi a}{l}\left(-a_k\sin\frac{k\pi at}{l}+b_k\cos\frac{k\pi at}{l}\right)\sin\frac{k\pi x}{l}. \tag{11}$$

Полагая в (10) и (11) $t=0$, в силу начальных условий (3), получим:

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\sin\frac{k\pi x}{l},\quad F(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\pi a}{l}b_k\sin\frac{k\pi x}{l}. \tag{12}$$

Формулы (12) представляют собой разложение заданных функций $f(x)$ и $F(x)$ в ряд Фурье по синусам в интервале $(0, l)$.

Коэффициенты разложений (12) вычисляются по известным формулам [1]:

$$a_k=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx,\qquad b_k=\frac{2}{k\pi a}\int_0^l F(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx. \tag{13}$$

Таким образом, решение задачи (1)—(3) дается рядом (10), где a_k и b_k определяются формулами (13).

Теорема. *Если $f(x)$ на отрезке $[0, l]$ дважды непрерывно дифференцируема, имеет кусочно-непрерывную третью производную и удовлетворяет условиям*

$$f(0)=f(l)=0,\quad f''(0)=f''(l)=0, \tag{14}$$

а $F(x)$ непрерывно дифференцируема, имеет кусочно-непрерывную вторую производную и удовлетворяет условиям

$$F(0)=F(l)=0, \tag{15}$$

то функция $u(x, t)$, определяемая рядом (10), *имеет непрерывные производные 2-го порядка и удовлетворяет уравнению* (1), *граничным условиям* (2) *и начальным условиям* (3). *При этом возможно почленное дифференцирование ряда* (10) *по x и t два раза, и полученные ряды сходятся абсолютно и равномерно при $0\leqslant x\leqslant l$ и любом t.*

Доказательство. Интегрируя по частям (13) и принимая во внимание (14) и (15), получим:

$$a_k=-\left(\frac{l}{\pi}\right)^3\frac{b_k^{(3)}}{k^3}\qquad b_k=-\left(\frac{l}{\pi}\right)^3\frac{a_k^{(2)}}{k^3}, \tag{16}$$

где

$$b_k^{(3)}=\frac{2}{l}\int_0^l f'''(x)\cos\frac{k\pi x}{l}\,dx,\quad a_k^{(2)}=\frac{2}{l}\int_0^l \frac{F''(x)}{a}\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx. \tag{17}$$

Из теории тригонометрических рядов [34] известно, что ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|a_k^{(2)}|}{k},\qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{|b_k^{(3)}|}{k} \tag{18}$$

сходятся. Подставив (16) в ряд (10), получим

$$u(x,\ t)=-\left(\frac{l}{\pi}\right)^3\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3}\left(b_k^{(3)}\cos\frac{k\pi at}{l}+a_k^{(2)}\sin\frac{k\pi at}{l}\right)\sin\frac{k\pi x}{l}. \tag{19}$$

Этот ряд мажорируется рядом

$$\left(\frac{l}{\pi}\right)^3\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3}\left(|b_k^{(3)}|+|a_k^{(2)}|\right),$$

который сходится. Следовательно, ряд (10) сходится абсолютно и равномерно. Принимая во внимание (18), легко убеждаемся, что ряд (10) можно дважды почленно дифференцировать по x и t. Этим теорема доказана.

Если начальные функции $f(x)$ и $F(x)$ не удовлетворяют условиям, сформулированным в теореме, то может не существовать дважды непрерывно дифференцируемого решения смешанной задачи (1)—(3). Однако, если $f(x)$ —непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая условиям $f(0)=f(l)=0$, а $F(x)$—непрерывная функция, причем $F(0)=F(l)=0$, то ряд (10) равномерно сходится при $0\leqslant x\leqslant l$ и любом t и определяет непрерывную функцию $u(x,\ t)$.

Будем называть *обобщенным решением* уравнения (1) при условиях (2) и (3) функцию $u(x,\ t)$, являющуюся пределом равномерно сходящейся последовательности $u_n(x,\ t)$ решений уравнения (1), удовлетворяющих граничным условиям (2) и начальным условиям, где $f_n(x)$, $F_n(x)$—последовательности функций, удовлетворяющих условиям сформулированной выше теоремы и таких, что

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^l [f(x)-f_n(x)]^2\,dx=\lim_{n\to\infty}\int_0^l [F(x)-F_n(x)]^2\,dx=0.$$

При предположениях, наложенных на функции $f(x)$ и $F(x)$ существование обобщенного решения вытекает из того, что частные суммы ряда (10) образуют последовательность $u_n(x\ \ t)$, которая удовлетворяет требуемым условиям и, следовательно, ряд (10) является обобщенным решением. Нетрудно показать, что обобщенное решение смешанной задачи (1)—(3) единственно.

Возвратимся теперь к найденному решению (10) задачи (1)—(3). Если ввести обозначения

$$a_k = A_k \sin \varphi_k, \quad b_k = A_k \cos \varphi_k,$$

то это решение можно записать в виде

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \left(\frac{k\pi a t}{l} + \varphi_k \right). \tag{20}$$

Каждый член этого ряда представляет собой так называемую *стоячую волну*, при которой точки струны совершают гармоническое колебательное движение с амплитудой $A_k \sin \frac{k\pi x}{l}$, зависящей от положения этой точки, с частотой $\omega_k = \frac{k\pi a}{l}$ и с одной и той же фазой φ_k.

Звуки можно классифицировать на музыкальные и не музыкальные — первые называются *нотами*, вторые *шумами*. Музыкальные звуки естественным образом располагаются в определенном порядке соответственно высоте — качеству, которое до известной степени может оценивать каждый. Те ноты, которые ухо не может различать по высоте, далее называются *тонами*.

При колебании струна издает звук, высота которого зависит от частоты колебаний; частота основного (самого низкого) тона выражается формулой $\omega_1 = \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{T_0}{\rho}}$. Тона, соответствующие более высоким частотам, чем основная, называются *обертонами*. Обертоны, частоты которых являются кратными основной частоте, называются *гармониками*. Первой гармоникой будем считать основной тон, второй гармоникой — тон с частотой $\omega_2 = 2\omega_1$ и т. д.

Решение (20) складывается из отдельных гармоник, амплитуды их, а потому и влияние их на звук, издаваемый струной, обыкновенно быстро убывают при увеличении номера гармоники и все их действие сводится к созданию *тембра* звука, различного для разных музыкальных инструментов и объясняемого именно наличием этих гармоник.

Существует очень мало колебательных систем с гармоническими обертонами, но эти немногие системы являются основными для построения почти всех музыкальных инструментов. Это является следствием того, что звук с гармоническими обертонами кажется особенно приятным в музыкальном отношении.

В точках

$$x = 0 \quad \frac{l}{k}, \quad \frac{2l}{k}, \quad \ldots, \quad \frac{k-1}{k} l, \; l$$

амплитуда колебаний k-й гармоники обращается в нуль, ибо в этих точках $\sin\frac{k\pi x}{l}=0$. Эти точки называются *узлами* k-й гармоники. Напротив, в точках

$$x=\frac{l}{2k},\quad \frac{3l}{2k},\quad \ldots,\quad \frac{(2k-1)\,l}{2k},$$

называемых *пучностями*, амплитуда k-й гармоники достигает наибольшей величины, ибо $\sin\frac{k\pi x}{l}$ в этих точках имеет максимальное абсолютное значение.

Если мы прижмем колеблющуюся струну точно в середине, т. е. в пучности ее основного тона, то обратятся в нуль амплитуды не только этого тона, но и всех других, имеющих пучности в этой точке, т. е. нечетных гармоник. Напротив, на четные гармоники, которые имеют узел в прижатой точке, это влиять не будет. Таким образом, остаются только четные гармоники, самой низкой частотой будет $\omega_2=\frac{2\pi}{l}\sqrt{\frac{T_0}{\rho}}$, и струна будет издавать не свой основной звук, а его *октаву*, т. е. звук с числом колебаний в секунду вдвое большим.

§ 2. Колебания защепленной струны

Пусть струна закреплена на концах. Оттянем ее вверх защепив в точке $x=c$, и затем отпустим, предоставив ей совершать свободные колебания. В этом случае начальные условия будут (рис. 17)

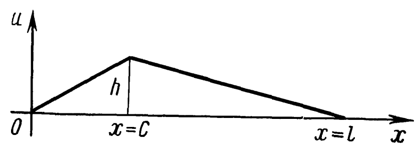

Рис. 17

$$u\big|_{t=0}=f(x)=\begin{cases}\dfrac{h}{c}x, & 0\leqslant x\leqslant c,\\[2mm] \dfrac{h\,(l-x)}{l-c}, & c\leqslant x\leqslant l,\end{cases}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0.$$

Применив формулы (13), получим

$$a_k=\frac{2hl^2}{\pi^2 c\,(l-c)\,k^2}\sin\frac{k\pi c}{l}. \qquad (21)$$

Следовательно, отклонение защепленной струны выразится рядом

$$u(x,\ t)=\frac{2hl^2}{\pi^2 c\,(l-c)}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\sin\frac{k\pi c}{l}\sin\frac{k\pi x}{l}\cos\frac{k\pi at}{l}. \qquad (22)$$