амплитуда колебаний k-й гармоники обращается в нуль, ибо в этих точках $\sin\frac{k\pi x}{l}=0$. Эти точки называются *узлами* k-й гармоники. Напротив, в точках

$$x=\frac{l}{2k},\quad \frac{3l}{2k},\ \ldots,\ \frac{(2k-1)\,l}{2k},$$

называемых *пучностями*, амплитуда k-й гармоники достигает наибольшей величины, ибо $\sin\frac{k\pi x}{l}$ в этих точках имеет максимальное абсолютное значение.

Если мы прижмем колеблющуюся струну точно в середине, т. е. в пучности ее основного тона, то обратятся в нуль амплитуды не только этого тона, но и всех других, имеющих пучности в этой точке, т. е. нечетных гармоник. Напротив, на четные гармоники, которые имеют узел в прижатой точке, это влиять не будет. Таким образом, остаются только четные гармоники, самой низкой частотой будет $\omega_2=\frac{2\pi}{l}\sqrt{\frac{T_0}{\rho}}$, и струна будет издавать не свой основной звук, а его *октаву*, т. е. звук с числом колебаний в секунду вдвое большим.

§ 2. Колебания защепленной струны

Пусть струна закреплена на концах. Оттянем ее вверх защепив в точке $x=c$, и затем отпустим, предоставив ей совершать свободные колебания. В этом случае начальные условия будут (рис. 17)

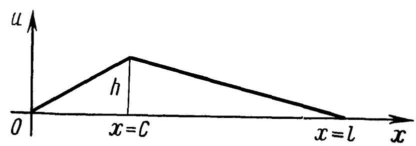

Рис. 17

$$u\,|_{t=0}=f(x)=\begin{cases}\dfrac{h}{c}x, & 0\leqslant x\leqslant c,\\ \dfrac{h\,(l-x)}{l-c}, & c\leqslant x\leqslant l,\end{cases}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0.$$

Применив формулы (13), получим

$$a_k=\frac{2hl^2}{\pi^2c\,(l-c)\,k^2}\sin\frac{k\pi c}{l}. \tag{21}$$

Следовательно, отклонение защепленной струны выразится рядом

$$u(x,\ t)=\frac{2hl^2}{\pi^2c\,(l-c)}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\sin\frac{k\pi c}{l}\sin\frac{k\pi x}{l}\cos\frac{k\pi at}{l}. \tag{22}$$

Из формулы (21) видно, что $a_k=0$, если $\sin\frac{k\pi c}{l}=0$ т. е. в решении (22) будут отсутствовать те гармоники, которые имеют узел в точке $x=c$. Так, например, если точка $x=c$ есть середина струны, то в решении (22) будут отсутствовать все четные гармоники.

§ 3. Колебания струны под действием удара

Рассмотрим теперь случай, когда начальные отклонения струны, закрепленной на концах, равны нулю. Пусть в начальный момент времени струна получает удар от молоточка в точке $x=c$, причем головка молоточка сконструирована так, что начальная скорость, данная струне, будет выражаться формулой

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\begin{cases} v_0\cos\frac{\pi(x-c)}{h}, & \text{если } |x-c|<\frac{h}{2},\\ 0, & \text{если } |x-c|>\frac{h}{2}. \end{cases}$$

Применив формулы (13) найдем, что

$$a_k=0,\quad b_k=\frac{4hv_0}{\pi^2ak}\,\frac{1}{1-\left(\frac{kh}{l}\right)^2}\sin\frac{k\pi c}{l}\cos\frac{k\pi h}{2l}. \tag{23}$$

Подставив эти значения в ряд (10), получим следующее выражение для искомого смещения струны, возбужденной ударом:

$$u(x,\ t)=\frac{4hv_0}{\pi^2a}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\,\frac{\sin\frac{k\pi c}{l}\cos\frac{k\pi h}{2l}}{1-\left(\frac{kh}{l}\right)^2}\sin\frac{k\pi x}{l}\cos\frac{k\pi at}{l}. \tag{24}$$

§ 4. Продольные колебания стержня

Рассмотрим задачу о продольных колебаниях однородного упругого стержня длины l, когда один его конец $x=0$ закреплен, а другой $x=l$ свободен. В гл. V было показано, что эта задача сводится к решению волнового уравнения

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2},\quad a^2=\frac{E}{\rho} \tag{25}$$

при граничных условиях

$$u|_{x=0}=0,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}=0 \tag{26}$$

и начальных условиях

$$u|_{t=0}=f(x),\quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=F(x)\quad (0\leqslant x\leqslant l). \tag{27}$$