

Из формулы (21) видно, что $a_k = 0$, если $\sin \frac{k\pi c}{l} = 0$ т. е. в решении (22) будут отсутствовать те гармоники, которые имеют узел в точке $x = c$. Так, например, если точка $x = c$ есть середина струны, то в решении (22) будут отсутствовать все четные гармоники.

§ 3. Колебания струны под действием удара

Рассмотрим теперь случай, когда начальные отклонения струны, закрепленной на концах, равны нулю. Пусть в начальный момент времени струна получает удар от молоточка в точке $x = c$, причем головка молоточка сконструирована так, что начальная скорость, данная струне, будет выражаться формулой

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \begin{cases} v_0 \cos \frac{\pi(x-c)}{h}, & \text{если } |x-c| < \frac{h}{2}, \\ 0 & \text{, если } |x-c| > \frac{h}{2}. \end{cases}$$

Применив формулы (13) найдем, что

$$a_k = 0, \quad b_k = \frac{4hv_0}{\pi^2 a k} \frac{1}{1 - \left(\frac{kh}{l}\right)^2} \sin \frac{k\pi c}{l} \cos \frac{k\pi h}{2l}. \quad (23)$$

Подставив эти значения в ряд (10), получим следующее выражение для искомого смещения струны, возбужденной ударом:

$$u(x, t) = \frac{4hv_0}{\pi^2 a} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \frac{\sin \frac{k\pi c}{l} \cos \frac{k\pi h}{2l}}{1 - \left(\frac{kh}{l}\right)^2} \sin \frac{k\pi x}{l} \cos \frac{k\pi a t}{l}. \quad (24)$$

§ 4. Продольные колебания стержня

Рассмотрим задачу о продольных колебаниях однородного упругого стержня длины l , когда один его конец $x = 0$ закреплен, а другой $x = l$ свободен. В гл. V было показано, что эта задача сводится к решению волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a^2 = \frac{E}{\rho} \quad (25)$$

при граничных условиях

$$u|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = 0 \quad (26)$$

и начальных условиях

$$u|_{t=0} = f(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = F(x) \quad (0 \leq x \leq l). \quad (27)$$