Из формулы (21) видно, что $a_k=0$, если $\sin\frac{k\pi c}{l}=0$ т. е. в решении (22) будут отсутствовать те гармоники, которые имеют узел в точке $x=c$. Так, например, если точка $x=c$ есть середина струны, то в решении (22) будут отсутствовать все четные гармоники.

§ 3. Колебания струны под действием удара

Рассмотрим теперь случай, когда начальные отклонения струны, закрепленной на концах, равны нулю. Пусть в начальный момент времени струна получает удар от молоточка в точке $x=c$, причем головка молоточка сконструирована так, что начальная скорость, данная струне, будет выражаться формулой

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\begin{cases} v_0\cos\frac{\pi(x-c)}{h}, & \text{если } |x-c|<\frac{h}{2}, \\ 0 & , \text{если } |x-c|>\frac{h}{2}. \end{cases}$$

Применив формулы (13) найдем, что

$$a_k=0,\quad b_k=\frac{4hv_0}{\pi^2ak}\,\frac{1}{1-\left(\frac{kh}{l}\right)^2}\sin\frac{k\pi c}{l}\cos\frac{k\pi h}{2l}. \tag{23}$$

Подставив эти значения в ряд (10), получим следующее выражение для искомого смещения струны, возбужденной ударом:

$$u(x,\ t)=\frac{4hv_0}{\pi^2a}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\,\frac{\sin\frac{k\pi c}{l}\cos\frac{k\pi h}{2l}}{1-\left(\frac{kh}{l}\right)^2}\sin\frac{k\pi x}{l}\cos\frac{k\pi at}{l}. \tag{24}$$

§ 4. Продольные колебания стержня

Рассмотрим задачу о продольных колебаниях однородного упругого стержня длины l, когда один его конец $x=0$ закреплен, а другой $x=l$ свободен. В гл. V было показано, что эта задача сводится к решению волнового уравнения

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2},\quad a^2=\frac{E}{\rho} \tag{25}$$

при граничных условиях

$$u|_{x=0}=0,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}=0 \tag{26}$$

и начальных условиях

$$u|_{t=0}=f(x),\quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=F(x)\quad (0\leqslant x\leqslant l). \tag{27}$$

Согласно методу Фурье, ищем частные решения уравнения (25) в виде

$$u(x,\ t) = X(x)\,T(t). \tag{28}$$

Подставив (28) в уравнение (25), получим

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2,$$

откуда получаем два уравнения

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \tag{29}$$

$$T''(t) + a^2\lambda^2 T(t) = 0. \tag{30}$$

Чтобы функция (28), отличная от тождественного нуля, удовлетворяла граничным условиям (26), очевидно, нужно потребовать выполнения условий

$$X(0) = 0, \quad X'(l) = 0. \tag{31}$$

Таким образом, мы пришли к задаче о собственных числах для уравнения (29) при граничных условиях (31). Интегрируя уравнение (29), получим

$$X(x) = C_1 \cos\lambda x + C_2 \sin\lambda x.$$

Из граничных условий (31) имеем

$$C_1 = 0, \quad C_2\lambda\cos\lambda l = 0.$$

Считая $C_2 \neq 0$ (в противном случае имели бы $X(x) \equiv 0$), находим $\cos\lambda l = 0$, откуда $\lambda l = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ (k — целое число).

Таким образом, нетривиальные решения задачи (29), (31) возможны лишь при значениях λ_k

$$\lambda_k = \frac{(2k+1)\pi}{2l}.$$

Собственным числам λ_k^2 соответствуют собственные функции

$$X_k(x) = \sin\frac{(2k+1)\pi x}{2l} \quad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

определенные с точностью до постоянного множителя, который мы положили равным единице (отрицательные целые значения k новых собственных функций не дадут).

При $\lambda = \lambda_k$ общее решение уравнения (30) имеет вид

$$T_k(t) = a_k \cos\frac{(2k+1)\pi a t}{2l} + b_k \sin\frac{(2k+1)\pi a t}{2l},$$

где a_k и b_k — произвольные постоянные. В силу (28), найдем, что функции

$$u_k(x, t) = T_k(t) X_k(x) = \\ = \left[a_k \cos\frac{(2k+1)\pi at}{2l} + b_k \sin\frac{(2k+1)\pi at}{2l}\right] \sin\frac{(2k+1)\pi x}{2l}$$

удовлетворяют уравнению (25) и граничным условиям (26) при любых a_k и b_k.

Составим ряд

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[a_k \cos\frac{(2k+1)\pi at}{2l} + b_k \sin\frac{(2k+1)\pi at}{2l}\right] \sin\frac{(2k+1)\pi x}{2l}. \quad (32)$$

Для выполнения начальных условий (27) необходимо, чтобы

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sin\frac{(2k+1)\pi x}{2l}, \quad (33)$$

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \frac{(2k+1)\pi a}{2l} \sin\frac{(2k+1)\pi x}{2l}. \quad (34)$$

Предполагая что ряды (33) и (34) сходятся равномерно, можно определить коэффициенты a_k и b_k, умножив обе части равенств (33) и (34) на $\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}$ и проинтегрировав по x в пределах от $x=0$ до $x=l$ Тогда, приняв во внимание, что

$$\int_0^l \sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l} \sin\frac{(2k+1)\pi x}{2l}\, dx = \begin{cases} 0 & \text{при } k \neq n \\ \frac{l}{2} & \text{при } k = n, \end{cases}$$

получим.

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}\, dx, \\ b_n &= \frac{4}{(2n+1)\pi a} \int_0^l F(x) \sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}\, dx. \end{aligned} \quad (35)$$

Подставив найденные значения коэффициентов в ряд (32), мы, очевидно, получим решение нашей задачи, если ряд (32) и ряды, полученные из него двукратным почленным дифференцированием по x и t, равномерно сходятся.

Рассматривая решение (32), видим, что колебательное движение стержня является результатом сложения простых гармонических колебаний

$$A_k \sin\frac{(2k+1)\pi x}{2l} \sin\left[\frac{(2k+1)\pi at}{2l} + \varphi_k\right],$$

где

$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi_k = \frac{a_k}{b_k},$$

совершающихся с амплитудами $A_k \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2l}$ и с частотами

$$\omega_k = \frac{(2k+1)\pi a}{2l} = \frac{(2k+1)\pi}{2l} \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

Основной тон, получающийся при $k=0$, имеет период колебания

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 4l \sqrt{\frac{\rho}{E}}.$$

Так как амплитуда основного тона равна

$$A_0 \sin \frac{\pi x}{2l},$$

то, очевидно, что в закрепленном конце стержня $x=0$ имеем узел, а в свободном конце $x=l$ — пучность.

С помощью метода Фурье легко можно исследовать задачу о продольных колебаниях стержня, которая была рассмотрена в § 2 гл. V. Напомним, что поставленная там задача привелась к решению уравнения (25) при граничных условиях (26) и начальных условиях

$$u \Big|_{t=0} = f(x) = rx, \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0 \quad (0 < x < l),$$

где r — постоянная.

Применяя формулы (35) найдем, что

$$a_k = \frac{(-1)^k 8lr}{(2k+1)^2 \pi^2}, \quad b_k = 0,$$

откуда вытекает, что относительное перемещение сечения стержня с абсциссой x выражается рядом

$$u(x, t) = \frac{8lr}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \cos \frac{(2k+1)\pi a t}{2l} \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2l}.$$

§ 5. Общая схема метода Фурье

В настоящем параграфе мы дадим изложение метода Фурье для решения смешанной граничной задачи без строгого обоснования полученных результатов.

Рассмотрим гиперболическое уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(p(x) \frac{\partial u}{\partial x}\right) - q(x) u = \rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \tag{36}$$