где

$$A_k=\sqrt{a_k^2+b_k^2},\quad \operatorname{tg}\varphi_k=\frac{a_k}{b_k},$$

совершающихся с амплитудами $A_k\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2l}$ и с частотами

$$\omega_k=\frac{(2k+1)\pi a}{2l}=\frac{(2k+1)\pi}{2l}\sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

Основной тон, получающийся при $k=0$, имеет период колебания

$$T=\frac{2\pi}{\omega_0}=4l\sqrt{\frac{\rho}{E}}.$$

Так как амплитуда основного тона равна

$$A_0\sin\frac{\pi x}{2l},$$

то, очевидно, что в закрепленном конце стержня $x=0$ имеем узел, а в свободном конце $x=l$ — пучность.

С помощью метода Фурье легко можно исследовать задачу о продольных колебаниях стержня, которая была рассмотрена в § 2 гл. V. Напомним, что поставленная там задача привелась к решению уравнения (25) при граничных условиях (26) и начальных условиях

$$u\Big|_{t=0}=f(x)=rx,\quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=0\quad (0<x<l),$$

где r — постоянная.

Применяя формулы (35) найдем, что

$$a_k=\frac{(-1)^k\,8lr}{(2k+1)^2\pi^2},\quad b_k=0,$$

откуда вытекает, что относительное перемещение сечения стержня с абсциссой x выражается рядом

$$u(x,\ t)=\frac{8lr}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\cos\frac{(2k+1)\pi at}{2l}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2l}.$$

§ 5. Общая схема метода Фурье

В настоящем параграфе мы дадим изложение метода Фурье для решения смешанной граничной задачи без строгого обоснования полученных результатов.

Рассмотрим гиперболическое уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right)-q(x)\,u=\rho(x)\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\tag{36}$$

где $p(x)$, $p'(x)$, $q(x)$ и $\rho(x)$ — непрерывные функции при $0 \leqslant x \leqslant l$, причем $p(x) > 0$, $q(x) \geqslant 0$, $\rho(x) > 0$.

Пусть требуется найти решение уравнения (36), удовлетворяющее однородным граничным условиям

$$\begin{gathered} \alpha u(0, t) + \beta \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = 0, \\ \gamma u(l, t) + \delta \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = 0, \end{gathered} \tag{37}$$

где α, β, γ и δ — постоянные, причем $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, $\gamma^2 + \delta^2 \neq 0$, и начальным условиям

$$u\Big|_{t=0} = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = F(x) \quad (0 \leqslant x \leqslant l). \tag{38}$$

Будем сначала искать нетривиальные решения уравнения (36) в виде произведения

$$u(x, t) = X(x) T(t), \tag{39}$$

удовлетворяющие только граничным условиям (37).

Подставляя (39) в уравнение (36), получим

$$T(t) \frac{d}{dx}[p(x) X'(x)] - q(x) X(x) T(t) = \rho(x) X(x) T''(t)$$

или

$$\frac{\frac{d}{dx}[p(x) X'(x)] - q(x) X(x)}{\rho(x) X(x)} = \frac{T''(t)}{T(t)}. \tag{40}$$

Левая часть последнего равенства зависит только от x, а правая часть — только от t и равенство возможно лишь тогда, когда общая величина отношений (40) будет постоянной. Обозначим эту постоянную через $-\lambda$. Тогда из равенства (40) получим два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$T''(t) + \lambda T(t) = 0, \tag{41}$$

$$\frac{d}{dx}[p(x) X'(x)] + [\lambda\rho(x) - q(x)] X(x) = 0. \tag{42}$$

Чтобы получить нетривиальные решения уравнения (36) вида (39), удовлетворяющие граничным условиям (37), необходимо, чтобы функция $X(x)$ удовлетворяла граничным условиям

$$\begin{gathered} \alpha X(0) + \beta X'(0) = 0, \\ \gamma X(l) + \delta X'(l) = 0. \end{gathered} \tag{43}$$

Таким образом, приходим к следующей задаче Штурма — Лиувилля о собственных числах: *найти такие значения параметра* λ, *при которых существуют нетривиальные решения уравнения* (42), *удовлетворяющие граничным условиям* (43).

Эта задача не при всяком λ имеет отличное от тождественного нуля (нетривиальное) решение. Те значения параметра λ, при которых задача (42)—(43) имеет нетривиальное решение, называются *собственными числами*, а сами эти решения—*собственными функциями*, соответствующими данному собственному числу. В силу однородности уравнения (42) и граничных условий (43), собственные функции определяются с точностью до постоянного множителя. Выберем этот множитель так, чтобы

$$\int_0^l \rho(x) X_k^2(x)\,dx = 1. \tag{44}$$

Собственные функции, удовлетворяющие условию (44), будем называть *нормированными.*

Установим некоторые общие свойства собственных функций и собственных чисел задачи Штурма—Лиувилля.

1) *Всякому собственному числу соответствует только одна линейно независимая собственная функция.*

Действительно, предположим, что при некотором значении λ существует два линейно независимых решения уравнения (42), удовлетворяющих граничным условиям (43). Тогда оказалось бы, что и общее решение уравнения (42) удовлетворяет этим условиям. Но этого быть не может, так как всегда можно найти решение уравнения (42) при таких начальных данных $X(0)$ и $X'(0)$, например $X(0)=\alpha$, $X(0)=\beta$, которые не удовлетворяют первому из граничных условий (43).

2) Собственные функции, соответствующие различным собственным числам, *ортогональны с весом* $\rho(x)$, т. е.

$$\int_0^l \rho(x) X_1(x) X_2(x)\,dx = 0. \tag{45}$$

Пусть λ_1 и λ_2—два различных собственных числа, а $X_1(x)$ и $X_2(x)$—соответствующие им собственные функции, так что

$$\frac{d}{dx}[p(x) X_1'(x)] + [\lambda_1\rho(x) - q(x)] X_1(x) = 0,$$
$$\frac{d}{dx}[p(x) X_2'(x)] + [\lambda_2\rho(x) - q(x)] X_2(x) = 0.$$

Умножим первое равенство на $X_2(x)$, второе—на $X_1(x)$ и вычтем одно из другого почленно, получим равенство

$$X_2(x)\frac{d}{dx}[p(x) X_1'(x)] - X_1(x)\frac{d}{dx}[p(x) X_2'(x)] + \\ + (\lambda_1 - \lambda_2)\rho(x) X_1(x) X_2(x) = 0,$$

которое можно переписать в виде

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\rho(x) X_1(x) X_2(x) + \frac{d}{dx}\{p(x)[X_2(x) X_1'(x) - X_1(x) X_2'(x)]\} = 0.$$

5*

Интегрируя это равенство по x в пределах от 0 до l, получим

$$(\lambda_2-\lambda_1)\int_0^l \rho(x)\,X_1(x)\,X_2(x)\,dx=$$

$$=p(x)\left[X_2(x)\,X_1'(x)-X_1(x)\,X_2'(x)\right]\Big|_{x=0}^{x=l}.$$

Приняв во внимание граничные условия (43), легко убеждаемся, что правая часть равна нулю, т. е.

$$(\lambda_2-\lambda_1)\int_0^l \rho(x)\,X_1(x)\,X_2(x)\,dx=0,$$

откуда в силу $\lambda_1\neq\lambda_2$,

$$\int_0^l \rho(x)\,X_1(x)\,X_2(x)\,dx=0,$$

что и требовалось доказать.

3) Все собственные числа *вещественны*.

В самом деле, допустим, что существует комплексное собственное число λ, которому соответствует собственная функция $X(x)$. Тогда комплексно сопряженное с ним число также будет собственным, а функция $\overline{X(x)}$, комплексно сопряженная с $X(x)$, собственной функцией, так как коэффициенты уравнения (42) и граничных условий (43) вещественны. Из условия ортогональности

$$\int_0^l \rho(x)\,X(x)\,\overline{X(x)}\,dx=\int_0^l \rho(x)\,|X(x)|^2\,dx=0$$

следует, что $X(x)=0$, т. е. комплексное число λ не является собственным.

4) Существует бесконечное множество вещественных собственных чисел (см. гл. XXIX), § 4)

$$\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3<\ldots<\lambda_n<\ldots,\ \lim\lambda_n=+\infty.$$

Пусть теперь λ_k — собственные числа, а $X_k(x)$ — собственные функции, образующие ортогональную и нормированную систему. Имеем

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\,X_k'(x)\right]-q(x)\,X_k(x)=-\lambda_k\rho(x)\,X_k(x).$$

Умножая обе части на $X_k(x)$, интегрируя и принимая во внимание (44), получим

$$\lambda_k=-\int_0^l\left\{\frac{d}{dx}\left[p(x)\,X_k'(x)\right]-q(x)\,X_k(x)\right\}X_k(x)\,dx,$$

откуда, интегрируя первое слагаемое по частям, придем к следующей формуле:

$$\lambda_k = \int_0^l [p(x) X_k'^2(x) + q(x) X_k^2(x)]\, dx - [p(x) X_k(x) X_k'(x)]\,\Big|_{x=0}^{x=l}. \tag{46}$$

Допустим, что $p(x) > 0$, $q(x) \geqslant 0$, $\rho(x) > 0$ и, кроме того,

$$[p(x) X_k(x) X_k'(x)]\,\Big|_{x=0}^{x=l} \leqslant 0. \tag{46a}$$

Тогда из формулы (46) непосредственно следует, что все собственные числа задачи (42), (43) неотрицательны.

Условие (46а) выполняется как раз при наиболее часто встречающихся в приложениях граничных условиях:

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0, \tag{43a}$$

$$X'(0) - h_1 X(0) = 0, \quad X'(l) + h_2 X(l) = 0, \quad h_1 \geqslant 0,\ h_2 \geqslant 0. \tag{43б}$$

В заключение отметим, что собственные функции $X_n(x)$ граничной задачи (42), (43а) или (42), (43б) (если $h_1 = h_2 = 0$, то $q(x) \geqslant q_0 > 0$) образуют *полную систему* *).

Обратимся теперь к уравнению (41). Его общее решение при $\lambda = \lambda_k$, которое обозначим $T_k(t)$, имеет вид

$$T_k(t) = A_k \cos\sqrt{\lambda_k}\,t + B_k \sin\sqrt{\lambda_k}\,t,$$

где A_k и B_k — произвольные постоянные.

Каждая функция

$$u_k(x\ \ t) = X_k(x)\, T_k(t) = (A_k \cos\sqrt{\lambda_k}\,t + B_k \sin\sqrt{\lambda_k}\,t)\, X_k(x)$$

будет решением уравнения (36), удовлетворяющим граничным условиям (37).

Чтобы удовлетворить начальным условиям (38), составим ряд

$$u(x,\ t) = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos\sqrt{\lambda_k}\,t + B_k \sin\sqrt{\lambda_k}\,t)\, X_k(x). \tag{47}$$

Если этот ряд сходится равномерно, так же как и ряды, получающиеся из него двукратным почленным дифференцированием по x и t, то сумма его, очевидно, будет решением уравнения (36), удовлетворяющим граничным условиям (37). Для выполнения

---

*) Система функций

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \ldots,\ \varphi_n(x),\ \ldots$$

называется *полной*, если не существует отличной от тождественного нуля квадратично суммируемой функции, ортогональной ко всем функциям системы.

начальных условий (38) необходимо, чтобы

$$u\big|_{t=0}=f(x)=\sum_{k=1}^{\infty} A_k X_k(x), \tag{48}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=F(x)=\sum_{k=1}^{\infty} B_k \sqrt{\lambda_k} X_k(x). \tag{49}$$

Таким образом, мы пришли к задаче о разложении произвольной функции в ряд по собственным функциям $X_k(x)$ граничной задачи (42), (43).

Предполагая, что (48) и (49) сходятся равномерно, можем определить коэффициенты A_k и B_k, умножив обе части равенств (48) и (49) на $\rho(x) X_k(x)$ и проинтегрировав по x в пределах от 0 до l. Тогда, принимая во внимание (44) и (45), получим

$$A_k=\int_0^l \rho(x) f(x) X_k(x)\,dx, \qquad B_k=\frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}\int_0^l \rho(x) F(x) X_k(x)\,dx.$$

Подставив эти значения коэффициентов A_k и B_k в ряд (47), мы, очевидно, получим решение смешанной задачи (36)—(38), если ряд (47) и ряды, полученные из него двухкратным почленным дифференцированием по x и t, равномерно сходятся.

Замечание. Метод Фурье применим и в случае многих пространственных переменных для гиперболических уравнений специального вида (см. гл. XVI), а также для уравнений эллиптического и параболического типов (см. части II и III).

ЗАДАЧИ

1. Однородная струна, закрепленная на концах $x=0$ и $x=l$, имеет в начальный момент времени форму параболы, симметричной относительно перпендикуляра, проведенного через точку $x=\frac{l}{2}$. Определить смещение точек струны от прямолинейного положения равновесия, предполагая, что начальные скорости отсутствуют.

Ответ:

$$u(x,\ t)=\frac{32h}{\pi^3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos\frac{(2k+1)\pi a t}{l}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{l}}{(2k+1)^3},$$

где h—начальное значение смещения в точке $x=\frac{l}{2}$.

2. Однородная струна с закрепленными концами возбуждается ударом жесткого плоского молоточка, сообщающего ей следующее начальное распределение скоростей:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\begin{cases}0 & 0\leqslant x<c-\delta,\\ v_0 & c-\delta\leqslant x\leqslant c+\delta,\\ 0 & c+\delta<x\leqslant l.\end{cases}$$

Найти колебание струны, если начальное отклонение равно нулю.

Ответ:

$$u(x,\ t)=\frac{4v_0l}{\pi^2a}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\sin\frac{k\pi c}{l}\sin\frac{k\pi\delta}{l}\sin\frac{k\pi at}{l}\sin\frac{k\pi x}{l}.$$

3. Однородная струна с закрепленными концами возбуждается ударом острого молоточка, передающего ей импульс I в точке $x=c$. Исследовать свободные колебания струны, если начальное отклонение равно нулю.

Ответ:

$$u(x,\ t)=\frac{2I}{\pi a\rho}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sin\frac{k\pi c}{l}\sin\frac{k\pi at}{l}\sin\frac{k\pi x}{l}.$$

Указание. Сначала считаем импульс I равномерно распределенным по отрезку $c-\delta\leqslant x\leqslant c+\delta$ струны. Тогда приходим к выражению для $u(x,\ t)$, приведенному в ответе к предыдущей задаче, причем $v_0=\frac{I}{2\delta\rho}$. Переходя к пределу при $\delta\longrightarrow 0$, получим решение задачи.

4. Однородный стержень длиной $2l$ сжат силами, приложенными к его концам так, что он укоротился до длины $2l(1-\varepsilon)$. При $t=0$ нагрузка снимается. Показать, что смещение $u(x,\ t)$ сечения с абсциссой x стержня определяется формулой

$$u(x,\ t)=\frac{8\varepsilon l}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)^2}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2l}\cos\frac{(2k+1)\pi at}{2l},$$

причем точка $x=0$ находится посредине стержня, a — скорость продольных волн в стержне.

Указание. Задача приводится к решению уравнения

$$\frac{\partial^2 a}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\qquad\left(a^2=\frac{E}{\rho}\right)$$

при условиях

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=-l}=0,\qquad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}=0,$$

$$u\Big|_{t=0}=-\varepsilon x,\qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0$$

5. Исследовать свободные колебания закрепленной струны, колеблющейся в среде, сопротивление которой пропорционально первой степени скорости.

Ответ:

$$u(x,\ t)=e^{-ht}\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos q_kt+b_k\sin q_kt)\sin\frac{k\pi x}{l},$$

где

$$a_k=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx,$$

$$b_k=\frac{h}{q_k}a_k+\frac{2}{lq_k}\int_0^l F(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx,$$

$$q_k=\sqrt{\frac{k^2\pi^2a^2}{l^2}-h^2}.$$

Указание. Применить метод Фурье к интегрированию уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+2h\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

где h — малое положительное число, при условиях

$$u|_{x=0}=0, \qquad u|_{x=l}=0,$$

$$u|_{t=0}=f(x), \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=F(x).$$

Глава XI

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ СТРУН И СТЕРЖНЕЙ

§ 1. Вынужденные колебания струны, закрепленной на концах

Рассмотрим вынужденные колебания однородной струны, закрепленной на концах, под действием внешней силы $p(x, t)$, рассчитанной на единицу длины. Эта задача приводится к решению уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+g(x, t) \qquad \left[g(x, t)=\frac{1}{\rho}p(x, t)\right] \tag{1}$$

при граничных условиях

$$u|_{x=0}=0, \qquad u|_{x=l}=0 \tag{2}$$

и начальных условиях

$$u|_{t=0}=f(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=F(x). \tag{3}$$

Будем искать решение этой задачи в виде суммы

$$u=v+w, \tag{4}$$

где v есть решение неоднородного уравнения

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+g(x, t), \tag{5}$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$v|_{x=0}=0, \qquad v|_{x=l}=0 \tag{6}$$

и начальным условиям

$$v|_{t=0}=0, \qquad \left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=0}=0, \tag{7}$$

а w есть решение однородного уравнения

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \tag{8}$$