Указание. Применить метод Фурье к интегрированию уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+2h\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

где h—малое положительное число, при условиях

$$u/_{x=0}=0, \qquad u/_{x=l}=0,$$

$$u/_{t=0}=f(x), \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=F(x).$$

Глава XI

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ СТРУН И СТЕРЖНЕЙ

§ 1. Вынужденные колебания струны, закрепленной на концах

Рассмотрим вынужденные колебания однородной струны, закрепленной на концах, под действием внешней силы $p(x, t)$, рассчитанной на единицу длины. Эта задача приводится к решению уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+g(x, t) \qquad \left[g(x, t)=\frac{1}{\rho}p(x, t)\right] \tag{1}$$

при граничных условиях

$$u|_{x=0}=0, \qquad u|_{x=l}=0 \tag{2}$$

и начальных условиях

$$u|_{t=0}=f(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=F(x). \tag{3}$$

Будем искать решение этой задачи в виде суммы

$$u=v+w, \tag{4}$$

где v есть решение неоднородного уравнения

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+g(x, t), \tag{5}$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$v|_{x=0}=0, \qquad v|_{x=l}=0 \tag{6}$$

и начальным условиям

$$v|_{t=0}=0, \qquad \left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=0}=0, \tag{7}$$

а w есть решение однородного уравнения

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \tag{8}$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$w|_{x=0}=0, \qquad w|_{x=l}=0 \tag{9}$$

и начальным условиям

$$w|_{t=0}=f(x), \ \left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_{t=0}=F(x). \tag{10}$$

Решение v представляет *вынужденные* колебания струны, т. е. такие колебания, которые совершаются под действием внешней возмущающей силы, когда начальные возмущения отсутствуют.

Решение w представляет *свободные* колебания струны, т. е. такие колебания, которые происходят только вследствие начального возмущения.

Методы нахождения свободных колебаний w были рассмотрены в предыдущих главах, так что здесь мы остановимся только на нахождении вынужденных колебаний v. Как и в случае свободных колебаний, будем искать решение v в виде ряда:

$$v(x, t)=\sum_{k=1}^{\infty} T_k(t)\sin\frac{k\pi x}{l}, \tag{11}$$

так что граничные условия (6) удовлетворяются сами собой (в предположении равномерной сходимости ряда).

Определим теперь функции $T_k(t)$ так, чтобы ряд (11) удовлетворял уравнению (5) и начальным условиям (7).

Подставив ряд (11) в уравнение (5), получим

$$\sum_{k=1}^{\infty}[T_k''(t)+\omega_k^2 T_k(t)]\sin\frac{k\pi x}{l}=g(x, t), \tag{12}$$

где положено

$$\omega_k=\frac{k\pi a}{l}. \tag{13}$$

Разложим функцию $g(x, t)$ в интервале $(0, l)$ в ряд Фурье по синусам:

$$g(x, t)=\sum_{k=1}^{\infty} g_k(t)\sin\frac{k\pi x}{l}, \tag{14}$$

где

$$g_k(t)=\frac{2}{l}\int_0^l g(\xi, t)\sin\frac{k\pi\xi}{l}\,d\xi. \tag{15}$$

Сравнивая разложения (12) и (14) для одной и той же функции $g(x, t)$, получим дифференциальные уравнения

$$T_k''(t)+\omega_k^2 T_k(t)=g_k(t) \qquad (k=1, 2, 3, \ldots), \tag{16}$$

определяющие функции $T_k(t)$.

Чтобы решение v, определяемое рядом (11), удовлетворяло и начальным условиям (7), достаточно подчинить функции $T_k(t)$ условиям

$$T_k(0)=0, \qquad T'_k(0)=0 \qquad (k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots). \tag{17}$$

Решение уравнений (16) при начальных условиях (17) имеет вид [1]:

$$T_k(t)=\frac{1}{\omega_k}\int\limits_0^t g_k(\tau)\sin\omega_k(t-\tau)\,d\tau,$$

или, подставляя вместо $g_k(\tau)$ его выражение (15):

$$T_k(t)=\frac{2}{l\omega_k}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_0^l g(\xi,\ \tau)\sin\omega_k(t-\tau)\sin\frac{k\pi\xi}{l}\,d\xi. \tag{18}$$

Подставив найденные выражения для $T_k(t)$ в ряд (11), получим решение задачи (5)—(7), если ряд (11) и ряды, полученные из него почленным дифференцированием по x и t до двух раз включительно, равномерно сходятся. Как можно показать, такая сходимость рядов будет обеспечена, если потребовать, чтобы непрерывная функция $f(x,\ t)$ имела непрерывные частные производные по x до второго порядка и чтобы при всех значениях t выполнялось условие

$$f(0,\ t)=0, \qquad f(l,\ t)=0.$$

Из вышеизложенного следует, что решение задачи (1)—(3) выражается в виде ряда

$$u(x,\ t)=\sum_{k=1}^{\infty}T_k(t)\sin\frac{k\pi x}{l}+$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi at}{l}+b_k\sin\frac{k\pi at}{l}\right)\sin\frac{k\pi x}{l}, \tag{19}$$

где коэффициенты $T_k(t)$ определяются по формулам (18), а

$$a_k=\frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx, \qquad b_k=\frac{2}{k\pi a}\int\limits_0^l F(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx. \tag{20}$$

В качестве примера рассмотрим случай, когда отсутствуют начальные смещения и начальные скорости и на струну действует только непрерывно распределенная сила с линейной плотностью

$$p(x,\ t)=A\rho\sin\omega t.$$

В этом случае решение $u(x, t)$ определяется рядом

$$u(x, t)=\sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \sin \frac{k\pi x}{l}, \qquad (21)$$

где коэффициенты $T_k(t)$ определяются по формуле (18) и оказываются равными

$$T_k(t)=\frac{2Al}{\pi^2 k^2 a}\left[1-(-1)^k\right]\left[\frac{\omega_k \sin \omega t}{\omega_k^2-\omega^2}-\frac{\omega \sin \omega_k t}{\omega_k^2-\omega^2}\right] \quad (\omega \neq \omega_k). \qquad (22)$$

Если $\omega=\omega_k$, то выражение (22) для $T_k(t)$ теряет смысл и в этом случае для $T_k(t)$ имеем следующее выражение:

$$T_k(t)=-\frac{Al}{\pi^2 k^2 a}\left[1-(-1)^k\right] \frac{\omega_k t \cos \omega_k t-\sin \omega_k t}{\omega_k}. \qquad (23)$$

Подставив (22) в ряд (21), получим

$$u(x, t)=\frac{4A}{\pi} \sin \omega t \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin \frac{(2k+1)\pi x}{l}}{(2k+1)\left(\omega_{2k+1}^2-\omega^2\right)}-$$

$$-\frac{4Al\omega}{a\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin \frac{(2k+1)\pi a t}{l} \sin \frac{(2k+1)\pi x}{l}}{(2k+1)^2\left(\omega_{2k+1}^2-\omega^2\right)}. \qquad (24)$$

Первый член в правой части равенства (24), имеющий ту же частоту, что и возмущающая сила, характеризует «чистые» вынужденные колебания струны. Что же касается второго члена, то он состоит из бесконечно большого числа гармонических колебаний, совершающихся с частотой

$$\omega_{2k+1}=\frac{(2k+1)\pi a}{l},$$

и его следует отнести к «свободным» колебаниям струны, возбужденным внешней возмущающей силой.

Формула (24) показывает, что если частота внешней возмущающей силы ω приближается к одной из частот ω_{2k+1} собственных колебаний струны, то в разложении (24) появится член с особенно большой амплитудой, вследствие чего возникает явление, называемое *резонансом*. В случае же, когда частота $\omega=\omega_{2k+1}$, формула (24) теряет смысл и должна быть заменена другой. Эта формула легко получается, если принять во внимание (23). В данном случае решение задачи имеет вид

$$u(x,\ t)=\frac{2Al^2}{a^2\pi^3(2k_1+1)^3}(\sin\omega_{2k_1+1}t-\omega_{2k_1+1}t\cos\omega_{2k_1+1}t)\sin\frac{(2k_1+1)\pi x}{l}+$$
$$+\frac{4A}{\pi}\sin\omega_{2k_1+1}t\sum_{k=0}^{\infty}{}'\frac{\sin\frac{(2k+1)\pi x}{l}}{(2k+1)(\omega_{2k+1}^2-\omega_{2k_1+1}^2)}-$$
$$-\frac{4Al\omega_{2k_1+1}}{a\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin\frac{(2k+1)\pi at}{l}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{l}}{(2k+1)^2(\omega_{2k+1}^2-\omega_{2k_1+1}^2)},\qquad(25)$$

где штрих у знака суммы показывает, что надо исключить слагаемое, соответствующее $k=k_1$.

§ 2. Вынужденные колебания тяжелого стержня

Допустим, что мы имеем дело с довольно тяжелым и в то же время легко растяжимым стержнем, длина которого в нерастянутом состоянии l. Подвесим его за конец $x=0$, а конец $x=l$ оставим свободным; под влиянием силы тяжести такой стержень начнет совершать продольные колебания. Если обозначить через u смещение сечения с абсциссой x в момент времени t, то дифференциальное уравнение вынужденных колебаний рассматриваемого стержня будет иметь вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+g,\qquad(34)$$

где g — ускорение силы тяжести.

Так как начальные смещения и начальные скорости равны нулю, то по физическому смыслу поставленной задачи нам нужно найти такое решение уравнения (34), которое удовлетворяло бы граничным условиям

$$u|_{x=0}=0,\qquad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}=0\qquad(35)$$

и начальным условиям

$$u|_{t=0}=0,\qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0.\qquad(36)$$

Будем искать решение этой задачи в виде суммы

$$u=v+w,\qquad(37)$$

где v есть решение неоднородного уравнения (34), удовлетворяющее только граничным условиям (35), а w — решение однородного уравнения

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},\qquad(38)$$