ном случае решение задачи имеет вид

$$u(x,\ t)=\frac{2Al^2}{a^2\pi^3(2k_1+1)^3}(\sin\omega_{2k_1+1}t-\omega_{2k_1+1}t\cos\omega_{2k_1+1}t)\sin\frac{(2k_1+1)\pi x}{l}+$$
$$+\frac{4A}{\pi}\sin\omega_{2k_1+1}t\sum_{k=0}^{\infty}{}'\frac{\sin\frac{(2k+1)\pi x}{l}}{(2k+1)(\omega_{2k+1}^2-\omega_{2k_1+1}^2)}-$$
$$-\frac{4Al\omega_{2k_1+1}}{a\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin\frac{(2k+1)\pi at}{l}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{l}}{(2k+1)^2(\omega_{2k+1}^2-\omega_{2k_1+1}^2)},\tag{25}$$

где штрих у знака суммы показывает, что надо исключить слагаемое, соответствующее $k=k_1$.

§ 2. Вынужденные колебания тяжелого стержня

Допустим, что мы имеем дело с довольно тяжелым и в то же время легко растяжимым стержнем, длина которого в нерастянутом состоянии l. Подвесим его за конец $x=0$, а конец $x=l$ оставим свободным; под влиянием силы тяжести такой стержень начнет совершать продольные колебания. Если обозначить через u смещение сечения с абсциссой x в момент времени t, то дифференциальное уравнение вынужденных колебаний рассматриваемого стержня будет иметь вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+g,\tag{34}$$

где g — ускорение силы тяжести.

Так как начальные смещения и начальные скорости равны нулю, то по физическому смыслу поставленной задачи нам нужно найти такое решение уравнения (34), которое удовлетворяло бы граничным условиям

$$u|_{x=0}=0,\qquad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}=0\tag{35}$$

и начальным условиям

$$u|_{t=0}=0,\qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0.\tag{36}$$

Будем искать решение этой задачи в виде суммы

$$u=v+w,\tag{37}$$

где v есть решение неоднородного уравнения (34), удовлетворяющее только граничным условиям (35), а w — решение однородного уравнения

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},\tag{38}$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$w\big|_{x=0}=0, \qquad \frac{\partial w}{\partial x}\bigg|_{x=l}=0 \tag{39}$$

и начальным условиям

$$w\big|_{t=0}=f(x)=-v\big|_{t=0}, \qquad \frac{\partial w}{\partial t}\bigg|_{t=0}=F(x)=-\frac{\partial v}{\partial t}\bigg|_{t=0}. \tag{40}$$

Найти решение $v(x, t)$ не представляет никаких затруднений. Действительно, если мы возьмем многочлен второй степени относительно x:

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma$$

и выберем его коэффициенты следующим образом:

$$\alpha=-\frac{g}{2a^2}, \qquad \beta=\frac{gl}{a^2}, \qquad \gamma=0,$$

то очевидно, что тогда удовлетворяются как уравнение (34), так и граничные условия (35). Следовательно, решение v найдено, а именно

$$v=\frac{gx(2l-x)}{2a^2}. \tag{41}$$

Отсюда вытекает, что

$$f(x)=\frac{gx(x-2l)}{2a^2}, \quad F(x)=0. \tag{42}$$

Задачу (38), (39), (40) мы уже рассматривали в гл. X § 4, и ее решение дается формулами (32) и (35); с помощью этих формул мы найдем, что

$$a_k=\frac{2}{l}\int_0^l \frac{gx(x-2l)}{2a^2}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2l}\,dx=-\frac{16gl^2}{\pi^3a^2(2k+1)^3},$$

$$b_k=0 \quad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Из всего изложенного следует, что решение задачи (34), (35), (36) выражается в виде

$$u(x, t)=\frac{gx(2l-x)}{2a^2}-\frac{16gl^2}{\pi^3a^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos\frac{(2k+1)\pi at}{2l}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2l}}{(2k+1)^3}. \tag{43}$$

С помощью этой формулы легко вычислить, например, в каких пределах будет изменяться длина всего стержня. В самом деле, положив в формуле (43) $x=l$, получим относительное перемещение концевого сечения стержня

$$u\big|_{x=l}=\frac{gl^2}{2a^2}-\frac{16gl^2}{\pi^3a^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}\cos\frac{(2k+1)\pi at}{2l}.$$

Правая часть этого равенства достигает своего наибольшего значения при $t=\frac{2l}{a}$, откуда

$$u_{\max}=\frac{gl^2}{2a^2}+\frac{16gl^2}{\pi^3a^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}.$$

Приняв во внимание, что

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}=\frac{\pi^3}{32},$$

найдем наибольшее смещение концевого сечения

$$u_{\max}=\frac{gl^2}{a^2}.$$

Отсюда вытекает, что при рассматриваемых продольных колебаниях длина стержня меняется в пределах от l до $l+\frac{gl^2}{a^2}$.

§ 3. Вынужденные колебания струны с подвижными концами

Рассмотрим вынужденные колебания ограниченной струны под действием внешней силы $p(x, t)$, рассчитанной на единицу длины, причем концы ее не закреплены, а двигаются по заданному закону. Эта задача приводится к решению уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+g(x, t) \tag{44}$$

при граничных условиях

$$u\,|_{x=0}=\varkappa_1(t), \quad u\,|_{x=l}=\varkappa_2(t) \tag{45}$$

и начальных условиях

$$u\,|_{t=0}=f(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=F(x). \tag{46}$$

К решению этой задачи нельзя применить метод Фурье, так как граничные условия (45) неоднородны. Но эта задача легко сводится к задаче с нулевыми граничными условиями.

Действительно, введем вспомогательную функцию

$$w(x, t)=\varkappa_1(t)+[\varkappa_2(t)-\varkappa_1(t)]\frac{x}{l}. \tag{47}$$

Ясно, что

$$w\,|_{x=0}=\varkappa_1(t), \quad w\,|_{x=l}=\varkappa_2(t). \tag{48}$$

Решение задачи ищем в виде суммы

$$u=v+w, \tag{49}$$

где v — новая неизвестная функция.