Правая часть этого равенства достигает своего наибольшего значения при $t=\frac{2l}{a}$, откуда

$$u_{\max}=\frac{gl^2}{2a^2}+\frac{16gl^2}{\pi^3a^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}.$$

Приняв во внимание, что

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}=\frac{\pi^3}{32},$$

найдем наибольшее смещение концевого сечения

$$u_{\max}=\frac{gl^2}{a^2}.$$

Отсюда вытекает, что при рассматриваемых продольных колебаниях длина стержня меняется в пределах от l до $l+\frac{gl^2}{a^2}$.

§ 3. Вынужденные колебания струны с подвижными концами

Рассмотрим вынужденные колебания ограниченной струны под действием внешней силы $p(x, t)$, рассчитанной на единицу длины, причем концы ее не закреплены, а двигаются по заданному закону. Эта задача приводится к решению уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+g(x, t) \tag{44}$$

при граничных условиях

$$u|_{x=0}=\varkappa_1(t), \quad u|_{x=l}=\varkappa_2(t) \tag{45}$$

и начальных условиях

$$u|_{t=0}=f(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=F(x). \tag{46}$$

К решению этой задачи нельзя применить метод Фурье, так как граничные условия (45) неоднородны. Но эта задача легко сводится к задаче с нулевыми граничными условиями.

Действительно, введем вспомогательную функцию

$$w(x, t)=\varkappa_1(t)+[\varkappa_2(t)-\varkappa_1(t)]\frac{x}{l}. \tag{47}$$

Ясно, что

$$w|_{x=0}=\varkappa_1(t), \quad w|_{x=l}=\varkappa_2(t). \tag{48}$$

Решение задачи ищем в виде суммы

$$u=v+w, \tag{49}$$

где v — новая неизвестная функция.

В силу граничных условий (45), (48) и начальных условий (46), функция $v(x, t)$ должна удовлетворять граничным условиям

$$v|_{x=0}=0, \quad v|_{x=l}=0 \tag{50}$$

и начальным условиям

$$v|_{t=0}=u|_{t=0}-w|_{t=0}=f(x)-\varkappa_1(0)-[\varkappa_2(0)-\varkappa_1(0)]\frac{x}{l}=f_1(x), \tag{51}$$

$$\left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=0}=\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}-\left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_{t=0}=$$

$$=F(x)-\varkappa_1'(0)-[\varkappa_2'(0)-\varkappa_1'(0)]\frac{x}{l}=F_1(x).$$

Подставив теперь (49) в уравнение (44), получим

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+g(x, t)+a^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

или, в силу (47),

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+g_1(x, t), \tag{52}$$

где

$$g_1(x, t)=g(x, t)-\varkappa_1''(t)-[\varkappa_2''(t)-\varkappa_1''(t)]\frac{x}{l}. \tag{53}$$

Таким образом, мы пришли к следующей задаче для функции $v(x, t)$:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+g_1(x, t),$$

$$v|_{x=0}=0, \qquad v|_{x=l}=0,$$

$$v|_{t=0}=f_1(x), \qquad \left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=0}=F_1(x).$$

Метод решения этой задачи изложен в § 1 этой главы.

В качестве примера рассмотрим поперечные колебания струны длиной l, закрепленной на конце $x=0$ и подверженной на конце $x=l$ действию возмущающей силы, вызывающей смещение этого конца, равное $A\sin\omega t$. При этом будем предполагать, что в момент времени $t=0$ начальные смещения и начальные скорости равны нулю.

Нетрудно видеть, что эта задача сводится к решению однородного уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{54}$$

при граничных условиях

$$u|_{x=0}=0, \qquad u|_{x=l}=A\sin\omega t \tag{55}$$

и начальных условиях

$$u|_{t=0}=0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0. \tag{56}$$

Будем искать решение задачи в виде суммы

$$u = v + w, \tag{57}$$

где w — решение однородного уравнения (54), удовлетворяющее только граничным условиям (55), а v — решение того же уравнения, удовлетворяющее граничным условиям

$$v\big|_{x=0} = 0, \quad v\big|_{x=l} = 0 \tag{58}$$

и начальным условиям

$$v\big|_{t=0} = f(x) = -w\big|_{t=0}, \quad \frac{\partial v}{\partial t}\Big|_{t=0} = F(x) = -\frac{\partial w}{\partial t}\Big|_{t=0}. \tag{59}$$

Решение w ищем в виде

$$w = X(x) \sin \omega t. \tag{60}$$

Подставив (60) в уравнение (54), получим

$$X''(x) + \frac{\omega^2}{a^2} X(x) = 0. \tag{61}$$

Чтобы получить решение $w(x, t)$ вида (60), удовлетворяющее граничным условиям (55), необходимо найти решение уравнения (61), удовлетворяющее граничным условиям

$$X(0) = 0, \quad X(l) = A. \tag{62}$$

Общее решение уравнения (61) имеет вид

$$X(x) = C_1 \sin \frac{\omega x}{a} + C_2 \sin \frac{\omega x}{a}.$$

Удовлетворяя граничным условиям (62), получим

$$C_1 = 0, \qquad C_2 \sin \frac{\omega l}{a} = A$$

и, следовательно,

$$X(x) = A \frac{\sin \frac{\omega x}{a}}{\sin \frac{\omega l}{a}}.$$

Отсюда, в силу (60), получим

$$w(x, t) = A \frac{\sin \frac{\omega x}{a} \sin \omega t}{\sin \frac{\omega l}{a}}. \tag{63}$$

Обратимся теперь к нахождению решения $v(x, t)$. Из формул (59) легко найдем, что

$$v\big|_{t=0} = f(x) = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t}\Big|_{t=0} = F(x) = -\frac{A\omega \sin \frac{\omega x}{a}}{\sin \frac{\omega l}{a}}. \tag{64}$$

Но решение однородного уравнения (54), удовлетворяющее граничным условиям (58) и начальным условиям (64), дается, как мы знаем, рядом

$$v(x, t)=\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\frac{k\pi at}{l}\sin\frac{k\pi x}{l},$$

где

$$b_k=-\frac{2A\omega}{k\pi a\sin\frac{\omega l}{a}}\int_0^l \sin\frac{\omega x}{a}\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx=(-1)^{k-1}\frac{2Aa\omega}{l\left[\omega^2-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2\right]};$$

таким образом,

$$v=\frac{2A\omega a}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{\omega^2-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2}\sin\frac{k\pi at}{l}\sin\frac{k\pi x}{l}. \tag{65}$$

Беря сумму выражений (63) и (65), получим решение задачи:

$$u(x, t)=A\frac{\sin\frac{\omega x}{a}}{\sin\frac{\omega l}{a}}\sin\omega t+\frac{2A\omega a}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{\omega^2-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2}\sin\frac{k\pi at}{l}\sin\frac{k\pi x}{l}, \tag{66}$$

причем считаем, что $\omega\neq\frac{k\pi a}{l}$.

§ 4. Единственность решения смешанной задачи

Рассмотрим следующую смешанную задачу.

Найти непрерывную в прямоугольнике $Q\,[0\leqslant x\leqslant l,\ 0\leqslant t\leqslant T]$ функцию $u(x, t)$, удовлетворяющую внутри Q уравнению

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right)-q(x)u+g(x, t), \tag{67}$$

где

$$p(x)>0,\ q(x)\geqslant 0 \text{ и } \rho(x)>0,$$

начальным условиям

$$u|_{t=0}=f(x),\qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=F(x)\quad (0\leqslant x\leqslant l) \tag{68}$$

и граничным условиям

$$u|_{x=0}=\varkappa_1(t),\quad u|_{x=l}=\varkappa_2(t)\quad (0\leqslant t\leqslant T). \tag{69}$$

Докажем единственность решения смешанной задачи (67)—(69), предполагая, что решение $u(x, t)$ имеет непрерывные производные до второго порядка включительно в Q.