Но решение однородного уравнения (54), удовлетворяющее граничным условиям (58) и начальным условиям (64), дается, как мы знаем, рядом

$$v(x, t)=\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\frac{k\pi at}{l}\sin\frac{k\pi x}{l},$$

где

$$b_k=-\frac{2A\omega}{k\pi a\sin\frac{\omega l}{a}}\int_0^l \sin\frac{\omega x}{a}\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx=(-1)^{k-1}\frac{2Aa\omega}{l\left[\omega^2-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2\right]};$$

таким образом,

$$v=\frac{2A\omega a}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{\omega^2-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2}\sin\frac{k\pi at}{l}\sin\frac{k\pi x}{l}. \qquad (65)$$

Беря сумму выражений (63) и (65), получим решение задачи:

$$u(x, t)=A\frac{\sin\frac{\omega x}{a}}{\sin\frac{\omega l}{a}}\sin\omega t+\frac{2A\omega a}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{\omega^2-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2}\sin\frac{k\pi at}{l}\sin\frac{k\pi x}{l}, \qquad (66)$$

причем считаем, что $\omega\neq\frac{k\pi a}{l}$.

§ 4. Единственность решения смешанной задачи

Рассмотрим следующую смешанную задачу.

Найти непрерывную в прямоугольнике $Q\,[0\leqslant x\leqslant l,\ 0\leqslant t\leqslant T]$ функцию $u(x, t)$, удовлетворяющую внутри Q уравнению

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right)-q(x)\,u+g(x, t), \qquad (67)$$

где

$$p(x)>0,\ q(x)\geqslant 0 \ \text{и}\ \rho(x)>0,$$

начальным условиям

$$u\big|_{t=0}=f(x),\quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=F(x)\quad (0\leqslant x\leqslant l) \qquad (68)$$

и граничным условиям

$$u\big|_{x=0}=\varkappa_1(t),\quad u\big|_{x=l}=\varkappa_2(t)\quad (0\leqslant t\leqslant T). \qquad (69)$$

Докажем единственность решения смешанной задачи (67)—(69), предполагая, что решение $u(x, t)$ имеет непрерывные производные до второго порядка включительно в Q.

Пусть u_1 и u_2 два решения рассматриваемой задачи. Тогда разность

$$v(x,\ t)=u_1(x,\ t)-u_2(x,\ t)$$

будет удовлетворять однородному уравнению

$$\rho(x)\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial v}{\partial x}\right)-q(x)v, \tag{70}$$

нулевым начальным условиям

$$v\big|_{t=0}=0,\quad \frac{\partial v}{\partial t}\bigg|_{t=0}=0 \tag{71}$$

и однородным граничным условиям

$$v\big|_{x=0}=0,\quad v\big|_{x=l}=0. \tag{72}$$

Докажем, что $v(x,\ t)\equiv 0$ в Q.

Рассмотрим интеграл энергии

$$E(t)=\frac{1}{2}\int_0^l\left[\rho(x)\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2+p(x)\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+q(x)v^2\right]dx \tag{73}$$

и покажем, что он не зависит от t. Действительно, дифференцируя $E(t)$ по t, получим

$$\frac{dE(t)}{dt}=\int_0^l\left[\rho(x)\frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}+p(x)\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial t}+q(x)v\frac{\partial v}{\partial t}\right]dx. \tag{74}$$

Дифференцирование под знаком интеграла возможно в силу непрерывности вторых производных. Интегрируя по частям средний член в правой части (74), будем иметь

$$\frac{dE(t)}{dt}=\int_0^l\left[\rho(x)\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}-\frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\right.$$

$$\left.+q(x)v\right]\frac{\partial v}{\partial t}dx+p(x)\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial t}\bigg|_{x=0}^{x=l}.$$

Отсюда, в силу уравнения (70) и граничных условий (72), следует, что

$$\frac{dE(t)}{dt}=0,\ \text{т. е. } E(t)=\text{const}.$$

Учитывая начальные условия (71), получим

$$E(t)=\text{const}=E(0)=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^l\left[\rho(x)\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2+p(x)\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+q(x)v^2\right]\bigg|_{t=0}dx=0.$$

Тогда из (73) и начальных условий (71) следует, что $v(x, t) \equiv 0$ в Q, т. е. $u_1 = u_2$, что и требовалось доказать.

Замечание. Единственность решения смешанной задачи для уравнения (67) имеет место и в том случае, если граничные условия (69) заменить более сложными:

$$\frac{\partial u}{\partial x} - h_1 u \Big|_{x=0} = \varkappa_1(t), \quad \frac{\partial u}{\partial x} + h_2 u \Big|_{x=l} = \varkappa_2(t),$$

где h_1 и h_2 — постоянные $\geqslant 0$.

ЗАДАЧИ

1. Найти решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + bx(x-l)$$

при нулевых начальных и граничных условиях:

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0.$$

Ответ:

$$u(x, t) = -\frac{bx}{12}(x^3 - 2x^2 l + l^3) + \frac{8l^4}{\pi^5} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos\dfrac{(2n+1)\pi a t}{l} \sin\dfrac{(2n+1)\pi x}{l}}{(2n+1)^5}.$$

2. Стержень длиной l, конец которого $x = 0$ закреплен, находится в состоянии покоя. В момент времени $t = 0$ к свободному концу приложена сила Q (на единицу площади), направленная вдоль стержня. Найти смещение $u(x, t)$ стержня в любой момент времени $t > 0$.

Ответ:

$$u(x, t) = \frac{Qx}{E} - \frac{8Ql}{\pi^2 E} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \cos\frac{(2k+1)\pi a t}{2l} \sin\frac{(2k+1)\pi x}{2l},$$

где E — модуль упругости.

Указание. Задача приводится к решению уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

при условиях

$$u(0, t) = 0, \qquad \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = \frac{Q}{E}; \qquad u(x, 0) = 0, \qquad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0.$$

Глава XII

КРУТИЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ОДНОРОДНОГО СТЕРЖНЯ

§ 1. Дифференциальное уравнение крутильных колебаний цилиндрического стержня

Рассмотрим однородный круговой цилиндрический стержень длины l. Допустим, что под влиянием какой-нибудь причины этот стержень совершает так называемые *крутильные колебания*, т. е.