Тогда из (73) и начальных условий (71) следует, что $v(x, t) \equiv 0$ в Q, т. е. $u_1 = u_2$, что и требовалось доказать.

Замечание. Единственность решения смешанной задачи для уравнения (67) имеет место и в том случае, если граничные условия (69) заменить более сложными:

$$\frac{\partial u}{\partial x} - h_1 u\,\Big|_{x=0} = \varkappa_1(t), \quad \frac{\partial u}{\partial x} + h_2 u\,\Big|_{x=l} = \varkappa_2(t),$$

где h_1 и h_2 — постоянные $\geqslant 0$.

ЗАДАЧИ

1. Найти решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + bx(x-l)$$

при нулевых начальных и граничных условиях:

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0.$$

Ответ:

$$u(x, t) = -\frac{bx}{12}(x^3 - 2x^2 l + l^3) + \frac{8l^4}{\pi^5} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos\frac{(2n+1)\pi a t}{l} \sin\frac{(2n+1)\pi x}{l}}{(2n+1)^5}.$$

2. Стержень длиной l, конец которого $x=0$ закреплен, находится в состоянии покоя. В момент времени $t=0$ к свободному концу приложена сила Q (на единицу площади), направленная вдоль стержня. Найти смещение $u(x, t)$ стержня в любой момент времени $t > 0$.

Ответ:

$$u(x, t) = \frac{Qx}{E} - \frac{8Ql}{\pi^2 E} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \cos\frac{(2k+1)\pi a t}{2l} \sin\frac{(2k+1)\pi x}{2l},$$

где E — модуль упругости.

Указание. Задача приводится к решению уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

при условиях

$$u(0, t) = 0, \qquad \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = \frac{Q}{E}; \qquad u(x, 0) = 0, \qquad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0.$$

Глава XII

КРУТИЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ОДНОРОДНОГО СТЕРЖНЯ

§ 1. Дифференциальное уравнение крутильных колебаний цилиндрического стержня

Рассмотрим однородный круговой цилиндрический стержень длины l. Допустим, что под влиянием какой-нибудь причины этот стержень совершает так называемые *крутильные колебания*, т. е.

такие колебания, при которых его поперечные сечения остаются плоскими и поворачиваются без какого-либо искажения одно относительно другого, вращаясь вокруг оси стержня. В случае кругового цилиндрического стержня при кручении поперечные сечения не смещаются параллельно его оси.

Будем рассматривать *малые* колебания. Докажем, что в этом случае угол поворота какого-нибудь сечения стержня будет удовлетворять волновому уравнению. С этой целью поместим начало координат в один из концов стержня, а ось Ox направим по его оси.

Пусть mn и m_1n_1 два поперечных сечения, расстояние между которыми равно dx. Для того чтобы сечение mn повернулось

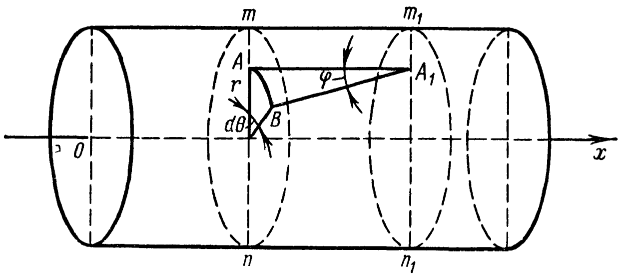

Рис. 18

относительно сечения m_1n_1 на угол θ, необходимо приложить к нему некоторый момент M. Его называют *закручивающим моментом*.

Для вычисления этого момента поступим следующцм образом. Выделим из стержня бесконечно тонкий цилиндр с поперечным сечением $d\sigma$ (рис. 18); допустим, что под действием закручивающего момента, приложенного к этому сечению, конец A прямолинейной образующей AA_1 переместится на весьма малое расстояние

$$\smile AB = r\theta. \tag{1}$$

Обозначим через τ величину напряжения, вызванного сдвигом образующей AA_1 в положение BA_1. Применяя закон Гука, найдем, что

$$\tau = G\varphi,$$

где φ — угол AA_1B, а G — постоянная величина, называемая *модулем сдвига*.

Отсюда вытекает, что усилие, приходящееся на поперечное сечение $d\sigma$, выражается произведением

$$\tau\, d\sigma = G\varphi\, d\sigma. \tag{2}$$

Далее, в силу весьма малых размеров треугольника AA_1B, можно считать, что

$$\smile AB = \varphi\, dx, \tag{3}$$

а из сравнения формул (1) и (3) видно, что

$$\varphi = r\frac{\partial\theta}{\partial x};$$

следовательно,

$$\tau\, d\sigma = G\frac{\partial\theta}{\partial x} r\, d\sigma.$$

Если обозначить через dM элементарный закручивающий момент, приложенный к сечению $d\sigma$, то получим

$$dM = r\tau\, d\sigma = G\frac{\partial\theta}{\partial x} r^2\, d\sigma.$$

Чтобы найти полный закручивающий момент M, надо проинтегрировать это равенство по всей площади сечения mn; тогда получим

$$M = G\frac{\partial\theta}{\partial x}\iint r^2\, d\sigma.$$

Но так как интеграл

$$\iint r^2\, d\sigma$$

есть полярный момент инерции сечения mn, то, обозначив его через J, найдем окончательное выражение искомого закручивающего момента:

$$M = GJ\frac{\partial\theta}{\partial x}. \tag{4}$$

Выведем теперь дифференциальное уравнение крутильных колебаний стержня.

С этой целью рассмотрим часть стержня, заключенную между двумя поперечными сечениями mn и m_1n_1 с абсциссами x и $x+dx$. Закручивающий момент в сечении с абсциссой x равен $GJ\frac{\partial\theta}{\partial x}$; момент в сечении с абсциссой $x+dx$ равен $GJ\frac{\partial\theta}{\partial x}+GJ\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}dx$. Для получения уравнения крутильных колебаний надо приравнять результирующий момент $GJ\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}dx$ произведению углового ускорения $\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}$ на момент инерции элемента mnm_1n_1 относительно оси стержня. Таким образом, получим

$$GJ\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}dx = \frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}K\, dx,$$

где через K обозначен момент инерции единицы длины стержня. Отсюда, после сокращения на dx, получим

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}, \quad a=\sqrt{\frac{GJ}{K}}. \tag{5}$$

Это и есть дифференциальное уравнение *крутильных колебаний* кругового цилиндрического стержня.

Если мы имеем дело не с круговым цилиндрическим стержнем, то при кручении поперечные сечения стержня не остаются плоскими, а искривляются. На основании теории кручения стержней, закручивающий момент M определяется по формуле

$$M=C\frac{\partial\theta}{\partial x},$$

где C — жесткость при кручении.

Дифференциальное уравнение крутильных колебаний цилиндрического стержня имеет тот же вид (5), в котором GJ заменено на C.

§ 2. Колебания стержня с одним прикрепленным диском

Займемся исследованием крутильных колебаний однородного стержня в том случае, когда один из его концов $x=0$ закреплен, а к другому концу $x=l$ прикреплен массивный диск с моментом инерции K_1 относительно оси стержня. Приравнивая момент силы инерции диска закручивающему моменту в сечении $x=l$, получим следующее граничное условие на конце $x=l$:

$$K_1\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}\bigg|_{x=l}=-GJ\frac{\partial\theta}{\partial x}\bigg|_{x=l}.$$

Задача, таким образом, сводится к решению уравнения (5) при граничных условиях

$$\theta\,|_{x=0}=0, \qquad \frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}\bigg|_{x=l}=-c^2\frac{\partial\theta}{\partial x}\bigg|_{x=l} \quad \left(c=\sqrt{\frac{GJ}{K_1}}\right) \tag{6}$$

и начальных условиях

$$\theta\,|_{t=0}=f(x), \qquad \frac{\partial\theta}{\partial t}\bigg|_{t=0}=F(x). \tag{7}$$

Согласно методу Фурье, частные решения уравнения (5) будем искать в виде

$$\theta(x,\ t)=T(t)\,X(x); \tag{8}$$

тогда получим уравнения

$$T''(t)+a^2\lambda^2T(t)=0, \tag{9}$$
$$X''(x)+\lambda^2X(x)=0. \tag{10}$$