где через K обозначен момент инерции единицы длины стержня. Отсюда, после сокращения на dx, получим

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2},\quad a=\sqrt{\frac{GJ}{K}}. \tag{5}$$

Это и есть дифференциальное уравнение *крутильных колебаний* кругового цилиндрического стержня.

Если мы имеем дело не с круговым цилиндрическим стержнем, то при кручении поперечные сечения стержня не остаются плоскими, а искривляются. На основании теории кручения стержней, закручивающий момент M определяется по формуле

$$M=C\frac{\partial\theta}{\partial x},$$

где C — жесткость при кручении.

Дифференциальное уравнение крутильных колебаний цилиндрического стержня имеет тот же вид (5), в котором GJ заменено на C.

§ 2. Колебания стержня с одним прикрепленным диском

Займемся исследованием крутильных колебаний однородного стержня в том случае, когда один из его концов $x=0$ закреплен, а к другому концу $x=l$ прикреплен массивный диск с моментом инерции K_1 относительно оси стержня. Приравнивая момент силы инерции диска закручивающему моменту в сечении $x=l$, получим следующее граничное условие на конце $x=l$:

$$K_1\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}\bigg|_{x=l}=-GJ\frac{\partial\theta}{\partial x}\bigg|_{x=l}.$$

Задача, таким образом, сводится к решению уравнения (5) при граничных условиях

$$\theta\,|_{x=0}=0,\qquad \frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}\bigg|_{x=l}=-c^2\frac{\partial\theta}{\partial x}\bigg|_{x=l}\qquad \left(c=\sqrt{\frac{GJ}{K_1}}\right) \tag{6}$$

и начальных условиях

$$\theta\,|_{t=0}=f(x),\qquad \frac{\partial\theta}{\partial t}\bigg|_{t=0}=F(x). \tag{7}$$

Согласно методу Фурье, частные решения уравнения (5) будем искать в виде

$$\theta(x,\ t)=T(t)\,X(x); \tag{8}$$

тогда получим уравнения

$$T''(t)+a^2\lambda^2T(t)=0, \tag{9}$$

$$X''(x)+\lambda^2X(x)=0. \tag{10}$$

Чтобы функция (8), отличная от тождественного нуля, удовлетворяла граничным условиям (6), очевидно, нужно потребовать выполнения условий:

$$X(0)=0, \quad c^2X'(l)-a^2\lambda^2X(l)=0. \tag{11}$$

Таким образом, мы приходим к задаче о собственных числах для уравнения (10) при граничных условиях (11).

Интегрируя уравнение (10), получим

$$X(x)=C_1\cos\lambda x+C_2\sin\lambda x.$$

Из граничных условий (11) находим

$$C_1=0, \quad (c^2\lambda\cos\lambda l-a^2\lambda^2\sin\lambda l)\,C_2=0.$$

Полагая $C_2\neq 0$, получим трансцендентное уравнение

$$a^2\lambda\sin\lambda l-c^2\cos\lambda l=0, \tag{12}$$

определяющее собственные числа задачи (10), (11).

Исследуем уравнение (12). Если положить

$$l\lambda=\mu, \qquad p=\frac{lc^2}{a^2}=\frac{lK}{K_1}, \tag{13}$$

то уравнение (12) примет следующий вид:

$$\mu\sin\mu-p\cos\mu=0 \quad (p>0). \tag{14}$$

Для нахождения вещественных корней этого уравнения достаточно построить графики функций

$$y=\operatorname{ctg}\mu, \qquad y=\frac{\mu}{p}$$

и затем определить абсциссы точек пересечения этих кривых (рис. 19). Из чертежа видно, что корень μ_k уравнения (14) с увеличением индекса k неограниченно возрастает по абсолютной величине, причем разность $\mu_k-(k-1)\pi$ стремится к нулю. Отсюда следует, что при достаточно большом k можно положить

$$\mu_k\approx(k-1)\pi. \tag{15}$$

Если по условиям задачи число p имеет малую величину, то приближенное равенство (15) будет давать достаточно точный результат и при небольших значениях k. Если же величина p не очень мала, то для вычисления корней

$$\mu_1,\ \mu_2,\ \mu_3,\ \ldots$$

можно прибегнуть к методу итераций.

Уравнение (14) не может иметь чисто мнимых корней. Допустим обратное, положим $\mu=i\nu$, причем ν — вещественное число. Тогда будем иметь

$$i\nu\sin i\nu-p\cos i\nu=0$$

или

$$\nu \operatorname{sh} \nu + p \operatorname{ch} \nu = 0,$$

что невозможно, ибо слева оба слагаемых неотрицательны при любом вещественном ν.

В дальнейшем мы покажем, что уравнение (14) не может иметь также комплексных корней.

Таким образом, уравнение (14) имеет только вещественные корни, причем они попарно одинаковы по абсолютной величине и обратны по знаку, так что достаточно рассматривать только

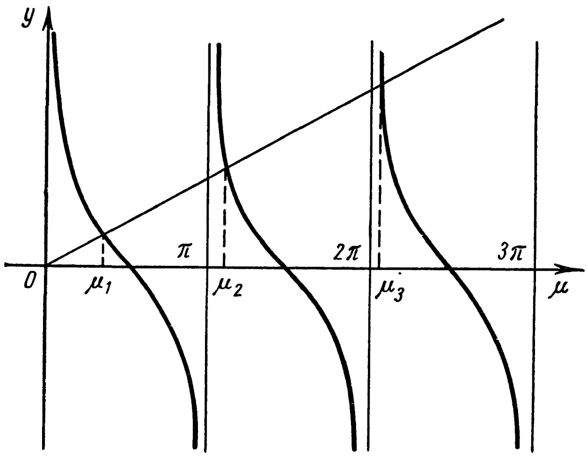

Рис. 19

положительные корни. Обозначим через μ_1, μ_2, μ_3, ... положительные корни уравнения (14). Тогда, согласно (13), собственные числа будут

$$\lambda_k^2 = \left(\frac{\mu_k}{l}\right)^2 \qquad (k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots). \tag{16}$$

Каждому собственному числу λ_k^2 соответствует собственная функция

$$X_k(x) = \sin\frac{\mu_k x}{l} \qquad (k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots). \tag{17}$$

Нетрудно показать, что собственные функции (17) не ортогональны на промежутке $(0,\ l)$.

При $\lambda = \lambda_k$ общее решение уравнения (9) имеет вид

$$T_k(t) = a_k \cos\frac{\mu_k at}{l} + b_k \sin\frac{\mu_k at}{l},$$

где a_k и b_k—произвольные постоянные. В силу (8), получим, что функция

$$\theta_k(x, t) = \left(a_k \cos\frac{\mu_k at}{l} + b_k \sin\frac{\mu_k at}{l}\right)\sin\frac{\mu_k x}{l}$$

удовлетворяет уравнению (5) и граничным условиям (6) при любых a_k и b_k. Далее составим ряд

$$\theta(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\frac{\mu_k at}{l} + b_k \sin\frac{\mu_k at}{l}\right)\sin\frac{\mu_k x}{l}. \tag{18}$$

Для выполнения начальных условий (7) необходимо, чтобы

$$\theta(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin\frac{\mu_k x}{l} = f(x), \tag{19}$$

$$\frac{\partial\theta(x, 0)}{\partial t} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{a\mu_k}{l} b_k \sin\frac{\mu_k x}{l} = F(x). \tag{20}$$

Эти формулы показывают, что для нахождения коэффициентов a_k и b_k необходимо разложить функции $f(x)$ и $F(x)$ в ряд Фурье по собственным функциям (17). Относительно этих функций было указано, что они не ортогональны в промежутке $(0, l)$; но нетрудно показать, что функции

$$\cos\frac{\mu_k x}{l} \qquad (k = 1, 2, \ldots) \tag{21}$$

образуют в промежутке $(0, l)$ ортогональную систему функций.

В самом деле, из легко доказываемого равенства

$$\int_0^l \cos\frac{\mu_k x}{l}\cos\frac{\mu_n x}{l}\,dx = l\cos\mu_k\cos\mu_n\frac{\mu_k \operatorname{tg}\mu_k - \mu_n \operatorname{tg}\mu_n}{\mu_k^2 - \mu_n^2}$$

видно, что если μ_k и μ_n суть корни уравнения (14), то

$$\int_0^l \cos\frac{\mu_k x}{l}\cos\frac{\mu_n x}{l}\,dx = \begin{cases} 0 \text{ при } k \neq n, \\ \frac{l}{4\mu_k}(2\mu_k + \sin 2\mu_k) \text{ при } k = n \end{cases} \tag{22}$$

Допустим далее, что ряды (19) и (20) можно почленно дифференцировать по x; тогда приняв во внимание формулы (22), легко найдем значения коэффициентов a_k и b_k, а именно:

$$a_k = \frac{4}{2\mu_k + \sin 2\mu_k}\int_0^l f'(x)\cos\frac{\mu_k x}{l}\,dx,$$

$$b_k = \frac{4l}{a\mu_k}\cdot\frac{1}{2\mu_k + \sin 2\mu_k}\int_0^l F'(x)\cos\frac{\mu_k x}{l}\,dx.$$

Подставив эти значения коэффициентов в ряд (18), получим решение задачи о крутильных колебаниях однородного стержня.

Мы утверждали выше, что уравнение (14)

$$\mu \sin \mu - p \cos \mu = 0$$

не может иметь комплексных корней. Предположим обратное. Пусть уравнение (14) имеет комплексный корень $\mu = a + ib$. Так как p — вещественное число, то уравнение (14) будет иметь и сопряженный корень $\bar{\mu} = a - ib$. Этим корням будут соответствовать две собственные функции

$$X(x) = \sin \frac{(a+ib)x}{l}, \qquad \overline{X(x)} = \sin \frac{(a-ib)x}{l}.$$

Из условия ортогональности (30) имеем

$$\int_0^l \cos \frac{(a+ib)x}{l} \cos \frac{(a-ib)x}{l}\, dx = 0$$

или

$$\int_0^l \left(\cos^2 \frac{ax}{l} \operatorname{ch}^2 \frac{bx}{l} + \sin^2 \frac{ax}{l} \operatorname{sh}^2 \frac{bx}{l}\right) dx = 0$$

и мы приходим к противоречию.

ЗАДАЧИ

1. Изучить крутильные колебания однородного стержня, у которого конец $x = 0$ свободен, а на конце $x = l$ прикреплен диск с моментом инерции k_1.

Ответ:

$$\theta(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{\mu_k a t}{l} + b_k \sin \frac{\mu_k a t}{l}\right) \cos \frac{\mu_k x}{l},$$

$$a_k = \frac{2}{\mu_k} \cdot \frac{p^2 + \mu_k^2}{p(p+1) + \mu_k^2} \int_0^l f'(x) \sin \frac{\mu_k x}{l}\, dx,$$

$$b_k = \frac{2l}{a\mu_k^2} \cdot \frac{p^2 + \mu_k^2}{p(p+1) + \mu_k^2} \int_0^l F'(x) \sin \frac{\mu_k x}{l}\, dx,$$

где μ_1, μ_2, μ_3 — положительные корни уравнения

$$\mu \cos \mu + p \sin \mu = 0 \quad \left(p = \frac{lK}{K_1} > 0\right).$$

2. Изучить крутильные колебания стержня, у которого к обоим концам прикреплены два одинаковых диска.

Ответ:

$$\theta(x,\ t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{\mu_k at}{l}+b_k\sin\frac{\mu_k at}{l}\right)\left(\sin\frac{\mu_k x}{l}-\frac{p}{\mu_k}\cos\frac{\mu_k x}{l}\right),$$

$$a_k=\frac{2\mu_k}{\mu_k^2+p\,(p+2)}\int_0^l f'(x)\left(\cos\frac{\mu_k x}{l}+\frac{p}{\mu_k}\sin\frac{\mu_k x}{l}\right)dx,$$

$$b_k=\frac{2l}{a\,[\mu_k^2+p\,(p+2)]}\int_0^l F'(x)\left(\cos\frac{\mu_k x}{l}+\frac{p}{\mu_k}\sin\frac{\mu_k x}{l}\right)dx,$$

где $\mu_1,\ \mu_2,\ \mu_3$ — положительные корни уравнения

$$2\operatorname{ctg}\mu=\frac{\mu}{p}-\frac{p}{\mu}\qquad\left(p=\frac{lK}{K_1}\right).$$

3. К концу $x=l$ упругого стержня, закрепленного в точке $x=0$, подвешен груз P. Изучить продольные колебания стержня, предполагая, что на него действует внешняя сила $\rho g\,(x,\ t)$.

Указание. Задача приводится к интегрированию уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+g\,(x,\ t)$$

при граничных условиях

$$u\,|_{x=0}=0,\qquad \left.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|_{x=l}=-\,c^2\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}\qquad\left(c=\sqrt{\frac{gE}{P}}\right)$$

и при начальных условиях

$$u\,|_{t=0}=f\,(x),\qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=F\,(x).$$

Ответ:

Смещение сечения стержня выражается суммой

$$u=u_1+u_2,$$

где u_1 — свободные колебания стержня, которые определяются из формулы (26), если заменить в ней $\theta\,(x,\ t)$ на u_1, а u_2 — вынужденные колебания стержня, которые определяются с помощью ряда

$$u_2\,(x,\ t)=\sum_{k=1}^{\infty}T_k\,(t)\sin\frac{\mu_k x}{l},$$

где

$$T_k\,(t)=\frac{2}{a\mu_k^2}\cdot\frac{p^2+\mu_k^2}{p\,(p+1)+\mu_k^2}\int_0^t d\tau\int_0^l\frac{\partial g\,(\xi,\ \tau)}{\partial\xi}\sin\frac{a\mu_k\,(t-\tau)}{l}\cos\frac{\mu_k\xi}{l}\,d\xi,$$

а $\mu_1,\ \mu_2,\ \mu_3$ — положительные корни уравнения

$$\mu\operatorname{tg}\mu=p\qquad\left(p=\frac{glp}{P}\right).$$