Глава XIII

ФУНКЦИИ БЕССЕЛЯ

§ 1. Уравнение Бесселя

При решении многих задач математической физики приходят к линейному дифференциальному уравнению

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)\,y = 0, \tag{1}$$

где ν — постоянная. Это уравнение встречается также во многих вопросах физики, механики, астрономии и т. п. Уравнение (1) называется *уравнением Бесселя*. Так как уравнение (1) имеет особую точку $x = 0$, то его частное решение следует искать в виде обобщенного степенного ряда:

$$y = x^\rho \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \qquad (a_0 \neq 0). \tag{2}$$

Подставляя ряд (2) в уравнение (1), получим

$$(\rho^2 - \nu^2)\,a_0x^\rho + [(\rho+1)^2 - \nu^2]\,a_1x^{\rho+1} + \sum_{k=2}^{\infty} \{[(\rho+k)^2 - \nu^2]\,a_k + a_{k-2}\}\,x^{\rho+k} = 0. \tag{3}$$

Приравнивая нулю коэффициенты при различных степенях x, будем иметь:

$$\rho^2 - \nu^2 = 0, \tag{4}$$

$$[(\rho+1)^2 - \nu^2]\,a_1 = 0, \tag{5}$$

$$[(\rho+k)^2 - \nu^2]\,a_k + a_{k-2} = 0. \tag{6}$$

Из первого равенства находим два значения для ρ:

$$\rho_1 = \nu \quad \text{и} \quad \rho_2 = -\nu.$$

Если мы возьмем первый корень $\rho = \nu$, то из формул (5) и (6) получим

$$a_1 = 0 \quad \text{и} \quad a_k = -\frac{a_{k-2}}{k\,(2\nu + k)} \qquad (k = 2,\ 3,\ 4,\ \ldots).$$

Отсюда следует, что

$$a_{2k+1} = 0 \qquad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

а коэффициенты с четными индексами определяются, очевидно, по формулам

$$a_2 = -\frac{a_0}{2^2\,(\nu+1)\cdot 1!}, \quad a_4 = \frac{a_0}{2^4\,(\nu+1)\,(\nu+2)\cdot 2!} \text{ и т. д.,}$$

из которых ясно, что общее выражение для коэффициентов a_{2k} имеет такой вид:

$$a_{2k} = (-1)^k \frac{a_0}{2^{2k}(\nu+1)(\nu+2)\ \dots\ (\nu+k)\cdot k!} \quad (k = 1,\ 2,\ 3,\ \dots).$$

Что касается коэффициента a_0, который был до сих пор совершенно произвольным, то выберем его таким образом:

$$a_0 = \frac{1}{2^{\nu}\Gamma(\nu+1)}, \tag{7}$$

где $\Gamma(\nu)$ — гамма-функция, которая определяется для всех положительных значений ν (а также для всех комплексных значений с положительной вещественной частью) следующим образом:

$$\Gamma(\nu) = \int_0^{\infty} e^{-x}x^{\nu-1}\,dx. \tag{8}$$

При таком выборе a_0 коэффициент a_{2k} может быть записан в виде

$$a_{2k} = (-1)^k \frac{1}{2^{2k+\nu}k!\,(\nu+1)(\nu+2)\ \dots\ (\nu+k)\,\Gamma(\nu+1)}. \tag{9}$$

Это выражение может быть упрощено, если воспользоваться одним из основных свойств гамма-функции. Для этого проинтегрируем правую часть равенства (8) по частям; тогда получим следующую основную формулу:

$$\Gamma(\nu+1) = \nu\Gamma(\nu). \tag{10}$$

Отметим, что формула (10) дает возможность определить гамма-функцию для отрицательных значений ν, а также и для всех комплексных значений.

Пусть k — некоторое целое положительное число. Применяя несколько раз формулу (10), получим

$$\Gamma(\nu+k+1) = (\nu+1)(\nu+2)\ \dots\ (\nu+k)\,\Gamma(\nu+1). \tag{11}$$

Полагая в этой формуле $\nu = 0$, найдем, в силу равенства

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-x}\,dx = 1,$$

другое важное свойство гамма-функции, выражаемое равенством

$$\Gamma(k+1) = k!. \tag{12}$$

С помощью формулы (11) выражение (9) для коэффициента a_{2k} примет следующий вид:

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k}{2^{2k+\nu}k!\,\Gamma(\nu+k+1)}. \tag{13}$$

Внося найденные значения коэффициентов a_{2k+1} и a_{2k} в ряд (2), получим частное решение уравнения (1). Это решение носит название *функции Бесселя 1-го рода ν-го порядка* и обозначается обычно через $J_\nu(x)$. Таким образом,

$$J_\nu(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}}{k!\Gamma(\nu+k+1)}. \qquad (14)$$

Ряд (14) сходится при любом значении x, в чем нетрудно убедиться, применяя признак Даламбера.

Используя второй корень $\rho_2=-\nu$, можно построить второе частное решение уравнения (1). Оно может быть получено, очевидно, из решения (14) простой заменой ν на $-\nu$, так как уравнение (1) содержит только ν^2 и не меняется при замене ν на $-\nu$:

$$J_{-\nu}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu+2k}}{k!\,\Gamma(-\nu+k+1)}. \qquad (15)$$

Если ν не равно целому числу, то частные решения $J_\nu(x)$ и $J_{-\nu}(x)$ уравнения Бесселя (1) будут линейно независимыми, так как разложения, стоящие в правых частях формул (14) и (15), начинаются с разных степеней x. Если же ν есть целое положительное число n, то в этом случае легко обнаружить линейную зависимость решений $J_n(x)$ и $J_{-n}(x)$. Действительно, при целом ν для $k=0, 1, 2, \ldots, n-1$ величина $-\nu+k+1$ принимает целые отрицательные значения или нуль. Для этих значений k: $\Gamma(-\nu+k+1)=\infty$, что следует из формулы

$$\Gamma(m)=\frac{\Gamma(m+1)}{m}.$$

Таким образом, первые n членов в разложении (15) обратятся в нуль и мы получим

$$J_{-n}(x)=\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2k}}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(-n+k+1)}$$

или, положив $k=n+l$, получим

$$J_{-n}(x)=(-1)^n\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2l}}{\Gamma(l+1)\,\Gamma(n+l+1)},$$

т. е.

$$J_{-n}(x)=(-1)^n J_n(x) \qquad (n \text{ — целое}). \qquad (16)$$

Отсюда следует, что при целом n функции $J_n(x)$ и $J_{-n}(x)$ линейно зависимы.

Для того чтобы найти общее решение уравнения (1), когда ν равно целому числу n, необходимо найти второе, линейно-независимое от $J_\nu(x)$, частное решение. Для этого введем новую функцию $Y_\nu(x)$, положив

$$Y_\nu(x)=\frac{J_\nu(x)\cos\nu\pi-J_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi}. \tag{17}$$

Очевидно, что эта функция также является решением уравнения (1), так как она представляет собою линейную комбинацию частных решений $J_\nu(x)$ и $J_{-\nu}(x)$ этого уравнения. Затем нетрудно убедиться, на основании соотношения (16), что при ν, равном целому числу n, правая часть равенства (17) принимает неопределенный вид $\frac{0}{0}$. Если раскрыть эту неопределенность по правилу Лопиталя, то в результате ряда выкладок (которые ввиду их сложности здесь не воспроизводятся) получим следующее представление функции $Y_n(x)$ при целом положительном n:

$$Y_n(x)=\frac{2}{\pi}J_n(x)\ln\frac{x}{2}-\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2k}-$$
$$-\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}}{k!\,(k+n)!}\left[\frac{\Gamma'(k+1)}{\Gamma(k+1)}+\frac{\Gamma'(n+k+1)}{\Gamma(n+k+1)}\right]. \tag{18}$$

В частном случае, при $n=0$, функция $Y_0(x)$ представляется таким образом:

$$Y_0(x)=\frac{2}{\pi}J_0(x)\ln\frac{x}{2}-\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}}{(k!)^2}\frac{\Gamma'(k+1)}{\Gamma(k+1)}. \tag{19}$$

Введенная здесь функция $Y_\nu(x)$ называется *функцией Бесселя 2-го рода ν-го порядка* или *функцией Вебера*.

Функция Вебера $Y_\nu(x)$ является решением уравнения Бесселя также и в том случае, когда ν — целое число.

Функции $J_\nu(x)$ и $Y_\nu(x)$, очевидно, линейно независимы, следовательно, эти функции при всяком ν — дробном или целом — образуют фундаментальную систему решений. Отсюда вытекает, что общее решение уравнения (1) может быть представлено в виде

$$y=C_1J_\nu(x)+C_2Y_\nu(x), \tag{20}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

В заключение этого параграфа заметим, что для функций Бесселя и Вебера различных порядков имеют место следующие рекуррентные формулы:

$$J'_\nu(x)=J_{\nu-1}(x)-\frac{\nu}{x}J_\nu(x),\qquad Y'_\nu(x)=Y_{\nu-1}(x)-\frac{\nu}{x}Y_\nu(x), \tag{21}$$

$$J'_\nu(x)=-J_{\nu+1}(x)+\frac{\nu}{x}J_\nu(x),\qquad Y'_\nu(x)=-Y_{\nu+1}(x)+\frac{\nu}{x}Y_\nu(x), \tag{22}$$

$$J_{\nu+1}(x)=\frac{2\nu}{x}J_\nu(x)-J_{\nu-1}(x),\qquad Y_{\nu+1}(x)=\frac{2\nu}{x}Y_\nu(x)-Y_{\nu-1}(x). \tag{23}$$

Формулы (21), (22) проверяются непосредственным дифференцированием рядов для функции Бесселя. Докажем, например, справедливость формулы (21). Имеем

$$\frac{d}{dx}\left[x^{\nu}J_{\nu}(x)\right]=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k}\,2\,(\nu+k)\,x^{2\nu+2k-1}}{2^{\nu+2k}k!\,\Gamma(\nu+k+1)}$$

или, принимая во внимание, что $\Gamma(\nu+k+1)=(\nu+k)\,\Gamma(\nu+k)$, получим

$$\frac{d}{dx}\left[x^{\nu}J_{\nu}(x)\right]=x^{\nu}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu-1+2k}}{k!\,\Gamma(\nu-1+k+1)}.$$

Сравнив с разложением (14), будем иметь

$$\frac{d}{dx}\left[x^{\nu}J_{\nu}(x)\right]=x^{\nu}J_{\nu-1}(x).$$

Продифференцировав произведение, мы убедимся в справедливости формулы (21). Справедливость формулы (22) доказывается аналогично.

§ 2. Некоторые частные случаи функций Бесселя

В математической физике наиболее часто встречаются функции Бесселя

$$J_0(x),\quad J_1(x),\quad Y_0(x)\quad \text{и}\quad J_{\pm n\frac{1}{2}},$$

где n — целое число.

Первые две из этих функций представляются следующими рядами:

$$J_0(x)=1-\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^4}{2^2\cdot4^2}-\frac{x^6}{2^2\cdot4^2\cdot6^2}+\ldots,\tag{24}$$

$$J(x)=\frac{x}{2}\left(1-\frac{x^2}{2\cdot4}+\frac{x^4}{2\cdot4^2\cdot6}-\frac{x^6}{2\cdot4^2\cdot6^2\cdot8}+\ldots\right).\tag{25}$$

Для них имеются подробные таблицы. Графики функций $J_0(x)$, $J_1(x)$ и $Y_0(x)$ приведены на рис. 20 и 21.

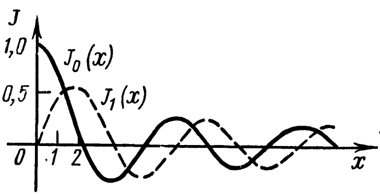

Рис. 20

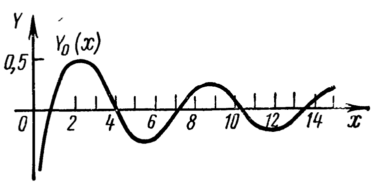

Рис. 21

Из формулы (23) видно, что вычисление функций $J_2(x)$, $J_3(x)$ и т. д. сводится к вычислению соответствующих значений функций $J_0(x)$ и $J_1(x)$.