Формулы (21), (22) проверяются непосредственным дифференцированием рядов для функции Бесселя. Докажем, например, справедливость формулы (21). Имеем

$$\frac{d}{dx}\left[x^{\nu} J_{\nu}(x)\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\, 2(\nu+k)\, x^{2\nu+2k-1}}{2^{\nu+2k} k!\, \Gamma(\nu+k+1)}$$

или, принимая во внимание, что $\Gamma(\nu+k+1) = (\nu+k)\,\Gamma(\nu+k)$, получим

$$\frac{d}{dx}\left[x^{\nu} J_{\nu}(x)\right] = x^{\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu-1+2k}}{k!\, \Gamma(\nu-1+k+1)}.$$

Сравнив с разложением (14), будем иметь

$$\frac{d}{dx}\left[x^{\nu} J_{\nu}(x)\right] = x^{\nu} J_{\nu-1}(x).$$

Продифференцировав произведение, мы убедимся в справедливости формулы (21). Справедливость формулы (22) доказывается аналогично.

§ 2. Некоторые частные случаи функций Бесселя

В математической физике наиболее часто встречаются функции Бесселя

$$J_0(x), \quad J_1(x), \quad Y_0(x) \quad \text{и} \quad J_{\pm n \frac{1}{2}},$$

где n — целое число.

Первые две из этих функций представляются следующими рядами:

$$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \ldots, \tag{24}$$

$$J(x) = \frac{x}{2}\left(1 - \frac{x^2}{2 \cdot 4} + \frac{x^4}{2 \cdot 4^2 \cdot 6} - \frac{x^6}{2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8} + \ldots\right). \tag{25}$$

Для них имеются подробные таблицы. Графики функций $J_0(x)$, $J_1(x)$ и $Y_0(x)$ приведены на рис. 20 и 21.

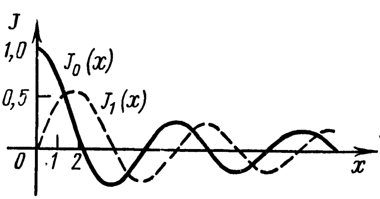

Рис. 20

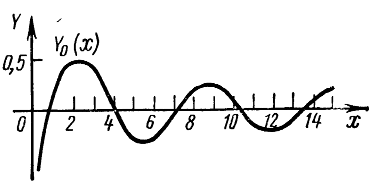

Рис. 21

Из формулы (23) видно, что вычисление функций $J_2(x)$, $J_3(x)$ и т. д. сводится к вычислению соответствующих значений функций $J_0(x)$ и $J_1(x)$.

Обратимся теперь к функции $J_{n+\frac{1}{2}}(x)$, где n — целое число. Найдем прежде всего значения функций $J_{\frac{1}{2}}(x)$ и $J_{-\frac{1}{2}}(x)$, для чего обратимся к разложению (14); из него видно, что

$$J_{\frac{1}{2}}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}+2k}}{k!\,\Gamma\left(\frac{3}{2}+k\right)}.$$

Но из формулы (11) непосредственно вытекает, что

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}+k\right)=\frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2k+1)}{2^{k+1}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right),$$

где

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}.$$

Таким образом,

$$J_{\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Последняя сумма представляет собой разложение $\sin x$ в степенной ряд, вследствие чего

$$J_{\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x. \tag{26}$$

Аналогично, из разложения (15) вытекает, что

$$J_{-\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x. \tag{27}$$

Если теперь воспользоваться формулой (23), то нетрудно видеть, что

$$J_{\frac{3}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(-\cos x+\frac{\sin x}{x}\right)=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{x}\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right],$$

$$J_{\frac{5}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left\{-\sin x+\frac{3}{x}\left[\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{x}\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right]\right\}=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[\left(1-\frac{3}{x^2}\right)\sin(x-\pi)+\frac{3}{x}\cos(x-\pi)\right].$$

Вообще, функция Бесселя $J_{n+\frac{1}{2}}(x)$ при целом n выражается через элементарные функции, а именно:

$$J_{n+\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[P_n\left(\frac{1}{x}\right)\sin\left(x-\frac{n\pi}{2}\right)+Q_{n-1}\left(\frac{1}{x}\right)\cos\left(x-\frac{n\pi}{2}\right)\right], \tag{28}$$

где $P_n\left(\frac{1}{x}\right)$ — многочлен степени n относительно $\frac{1}{x}$, а $Q_{n-1}\left(\frac{1}{x}\right)$—многочлен степени n—1, причем $P_n(0)=1$, $Q_{n-1}(0)=0$. Отсюда следует, что при больших значениях x имеет место асимптотическое представление функции Бесселя:

$$J_\nu(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[\cos\left(x-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+O(x^{-1})\right] \quad (x>0), \tag{29}$$

где через $O(x^{-1})$ обозначена величина порядка $\frac{1}{x}$.

Отметим, что асимптотическая формула (29) справедлива не только при $\nu=n+\frac{1}{2}$, но и при всех значениях ν.

§ 3. Ортогональность функций Бесселя и их корни

Рассмотрим уравнение

$$x^2y''+xy'+(k^2x^2-\nu^2)\,y=0, \tag{30}$$

где k—некоторая постоянная, отличная от нуля.

Введем вместо x новую независимую переменную $t=kx$. Тогда уравнение (30) преобразуется в такое,

$$t^2\frac{d^2y}{dt^2}+t\frac{dy}{dt}+(t^2-\nu^2)\,y=0,$$

а это есть уравнение Бесселя. Следовательно, функция $y=J_\nu(kx)$ будет решением уравнения

$$x^2\frac{d^2J_\nu(kx)}{dx^2}+x\frac{dJ_\nu(kx)}{dx}+(k^2x^2-\nu^2)\,J_\nu(kx)=0,$$

которое, разделив на x, можем написать в виде

$$\frac{d}{dx}\left[x\frac{dJ_\nu(kx)}{dx}\right]+\left(k^2x-\frac{\nu^2}{x}\right)J_\nu(kx)=0. \tag{31}$$

Возьмем два различных значения k и напишем соответствующие дифференциальные уравнения:

$$\frac{d}{dx}\left[x\frac{dJ_\nu(k_1x)}{dx}\right]+\left(k_1^2x-\frac{\nu^2}{x}\right)J_\nu(k_1x)=0,$$

$$\frac{d}{dx}\left[x\frac{dJ_\nu(k_2x)}{dx}\right]+\left(k_2^2x-\frac{\nu^2}{x}\right)J_\nu(k_2x)=0.$$