Вообще, функция Бесселя $J_{n+\frac{1}{2}}(x)$ при целом n выражается через элементарные функции, а именно:

$$J_{n+\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[P_n\left(\frac{1}{x}\right)\sin\left(x-\frac{n\pi}{2}\right)+Q_{n-1}\left(\frac{1}{x}\right)\cos\left(x-\frac{n\pi}{2}\right)\right], \tag{28}$$

где $P_n\left(\frac{1}{x}\right)$ — многочлен степени n относительно $\frac{1}{x}$, а $Q_{n-1}\left(\frac{1}{x}\right)$ — многочлен степени $n-1$, причем $P_n(0)=1$, $Q_{n-1}(0)=0$. Отсюда следует, что при больших значениях x имеет место асимптотическое представление функции Бесселя:

$$J_\nu(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[\cos\left(x-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+O(x^{-1})\right] \quad (x>0), \tag{29}$$

где через $O(x^{-1})$ обозначена величина порядка $\frac{1}{x}$.

Отметим, что асимптотическая формула (29) справедлива не только при $\nu=n+\frac{1}{2}$, но и при всех значениях ν.

§ 3. Ортогональность функций Бесселя и их корни

Рассмотрим уравнение

$$x^2y''+xy'+(k^2x^2-\nu^2)\,y=0, \tag{30}$$

где k — некоторая постоянная, отличная от нуля.

Введем вместо x новую независимую переменную $t=kx$. Тогда уравнение (30) преобразуется в такое,

$$t^2\frac{d^2y}{dt^2}+t\frac{dy}{dt}+(t^2-\nu^2)\,y=0,$$

а это есть уравнение Бесселя. Следовательно, функция $y=J_\nu(kx)$ будет решением уравнения

$$x^2\frac{d^2J_\nu(kx)}{dx^2}+x\frac{dJ_\nu(kx)}{dx}+(k^2x^2-\nu^2)\,J_\nu(kx)=0,$$

которое, разделив на x, можем написать в виде

$$\frac{d}{dx}\left[x\frac{dJ_\nu(kx)}{dx}\right]+\left(k^2x-\frac{\nu^2}{x}\right)J_\nu(kx)=0. \tag{31}$$

Возьмем два различных значения k и напишем соответствующие дифференциальные уравнения:

$$\frac{d}{dx}\left[x\frac{dJ_\nu(k_1x)}{dx}\right]+\left(k_1^2x-\frac{\nu^2}{x}\right)J_\nu(k_1x)=0,$$

$$\frac{d}{dx}\left[x\frac{dJ_\nu(k_2x)}{dx}\right]+\left(k_2^2x-\frac{\nu^2}{x}\right)J_\nu(k_2x)=0.$$

Умножая первое из этих равенств на $J_\nu(k_2 x)$, а второе — на $J_\nu(k_1 x)$ и вычитая одно из другого, после несложных преобразований получим

$$(k_2^2-k_1^2)\, xJ_\nu(k_1 x)\, J_\nu(k_2 x) = \\ = \frac{d}{dx}\left[xJ_\nu(k_2 x)\frac{dJ_\nu(k_1 x)}{dx} - xJ_\nu(k_1 x)\frac{dJ_\nu(k_2 x)}{dx}\right]. \qquad (32)$$

Если теперь воспользоваться формулой (14), то нетрудно убедиться, что выражение, стоящее здесь в квадратных скобках, может быть разложено по степеням x, причем наинизшая степень x будет $x^{2(\nu+1)}$. Отсюда ясно, что это выражение будет обращаться в нуль при $x=0$, если $\nu>-1$. Приняв это во внимание, проинтегрируем равенство (32) по некоторому конечному промежутку $(0, l)$; тогда получим

$$(k_2^2-k_1^2)\int\limits_0^l xJ_\nu(k_1 x)\, J_\nu(k_2 x)\, dx = \\ = l\,[k_1 J'_\nu(k_1 l)\, J_\nu(k_2 l) - k_2 J'_\nu(k_2 l)\, J_\nu(k_1 l)], \qquad (33)$$

где через (′) обозначается, как обычно, дифференцирование по аргументу. При $l=1$ эта формула принимает вид

$$(k_2^2-k_1^2)\int\limits_0^1 xJ_\nu(k_1 x)\, J_\nu(k_2 x)\, dx = k_1 J'_\nu(k_1)\, J_\nu(k_2) - k_2 J_\nu(k_2)\, J_\nu(k_1). \quad (34)$$

Покажем теперь, что при $\nu>-1$ функция Бесселя $J_\nu(x)$ не может иметь комплексных корней. Допустим, что она имеет такой корень $a+ib$, причем $a\neq 0$. В разложении (14) все коэффициенты разложения вещественны и, следовательно, функция $J_\nu(x)$ кроме корня $a+ib$ должна иметь и сопряженный корень $a-ib$. Обратимся к формуле (34) и положим $k_1=a+ib$ и $k_2=a-ib$; при этом $k_1^2\neq k_2^2$ и формула дает

$$\int\limits_0^1 xJ_\nu(k_1 x)\, J_\nu(k_2 x)\, dx = 0.$$

Величины $J_\nu(k_1 x)$ и $J_\nu(k_2 x)$ будут комплексно сопряженными, следовательно, в предыдущей формуле под знаком интеграла стоит положительная величина и эта формула не может иметь места. Функция Бесселя $J_\nu(x)$ не может иметь и чисто мнимых корней. Действительно, подставив $\pm ib$ в формулу (14), получим разложение, содержащее только положительные члены:

$$J_\nu(ib) = (ib)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)}\cdot\frac{b^{2k}}{2^{\nu+2k}},$$

6*

так как, согласно формуле (8), гамма-функция $\Gamma(x)$ принимает положительные значения при $x>0$.

Покажем теперь, что функция $J_\nu(x)$ имеет вещественные корни. Для этого обратимся к асимптотическому разложению функции Бесселя (29):

$$J_\nu(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[\cos\left(x-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+O(x^{-1})\right] \qquad (x>0).$$

Из этой формулы видно, что при беспредельном удалении x вдоль положительной части оси Ox второе слагаемое в квадратных скобках стремится к нулю, а первое — бесчисленное множество раз изменяется от -1 к $+1$. Отсюда непосредственно вытекает, что функция $J_\nu(x)$ имеет бесчисленное множество вещественных корней.

Таким образом, приходим к следующему результату: *если $\nu>-1$, то функция $J_\nu(x)$ имеет все корни вещественные.*

Заметим, кроме того, что из разложения (14), содержащего только четные степени, непосредственно вытекает, что корни $J_\nu(x)$ будут попарно одинаковыми по абсолютной величине и обратными по знаку, так что достаточно рассматривать только положительные корни.

Пусть $k_1=\frac{\mu_i}{l}$, $k_2=\frac{\mu_j}{l}$, где μ_i и μ_j — два различных положительных корня уравнения

$$J_\nu(x)=0. \tag{35}$$

Тогда формула (33) дает непосредственно следующее *свойство ортогональности функций Бесселя*:

$$\int_0^l xJ_\nu\left(\mu_i\frac{x}{l}\right)J_\nu\left(\mu_j\frac{x}{l}\right)dx=0 \quad (i\neq j). \tag{36}$$

Пусть теперь $k=\frac{\mu}{l}$, где μ — положительный корень уравнения (35) Возьмем формулу (33), в которой положим $k_1=k$, а k_2 будем считать переменным и стремящимся к k, тогда получим

$$\int_0^l xJ_\nu(kx)\,J_\nu(k_2x)\,dx=\frac{lkJ'_\nu(kl)\,J_\nu(k_2l)}{k_2^2-k^2}.$$

При $k_2\to k$ правая часть этого равенства становится неопределенной так как числитель и знаменатель стремятся к нулю. Раскрыв эту неопределенность по правилу Лопиталя, получим

$$\int_0^l xJ_\nu^2\left(\mu\frac{x}{l}\right)dx=\frac{l^2}{2}J'^2_\nu(\mu). \tag{37}$$

Положив в формуле (22) $x=\mu$ и приняв во внимание, что μ есть корень уравнения (35), получим

$$J_\nu'(\mu) = -J_{\nu+1}(\mu),$$

и формулу (37) можно записать еще следующим образом:

$$\int_0^l x J_\nu^2\left(\mu \frac{x}{l}\right) dx = \frac{l^2}{2} J_{\nu+1}^2(\mu). \tag{38}$$

Таким образом, мы имеем

$$\int_0^l x J_\nu\left(\mu_i \frac{x}{l}\right) J_\nu\left(\mu_j \frac{x}{l}\right) dx = \begin{cases} 0, & \text{если } j \neq i, \\ \frac{l^2}{2} J_\nu'^2(\mu_i) = \frac{l^2}{2} J_{\nu+1}^2(\mu_i), & \text{если } j = i, \end{cases}$$
$$(\nu > -1), \tag{39}$$

где μ_i и μ_j — положительные корни уравнения $J_\nu(x) = 0$.

Рассмотрим теперь более общее уравнение

$$\alpha J_\nu(x) + \beta x J_\nu'(x) = 0 \qquad (\nu > -1), \tag{40}$$

где α и β — заданные вещественные числа.

Пусть $k_1 = \frac{\mu_i}{l}$, $k_2 = \frac{\mu_j}{l}$, где μ_i и μ_j — два различных корня уравнения (40), т. е.

$$\alpha J_\nu(k_1 l) + \beta k_1 l J_\nu'(k_1 l) = 0, \quad \alpha J_\nu(k_2 l) + \beta k_2 l J_\nu'(k_2 l) = 0.$$

Отсюда непосредственно имеем

$$k_1 J_\nu'(k_1 l) J_\nu(k_2 l) - k_2 J_\nu'(k_2 l) J_\nu(k_1 l) = 0.$$

Следовательно, и в этом случае правая часть формулы (33) также равна нулю и мы имеем по-прежнему условие ортогональности (36).

Из условия ортогональности, как и выше, непосредственно вытекает, что уравнение (40) не может иметь комплексных корней $a+ib$, где $a \neq 0$. Уравнение (40) не может иметь и чисто мнимых корней $\pm ib$, за исключением случая $\frac{\alpha}{\beta} + \nu < 0$, когда оно имеет два чисто мнимых корня.

Нетрудно показать, что уравнение (40) имеет вещественные корни. В самом деле, положим

$$y = J_\nu'^2(x) + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) J_\nu^2(x).$$

Тогда после простых вычислений получим

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{x J_\nu'(x)}{J_\nu(x)}\right] = -\frac{xy}{J_\nu^2(x)}.$$

Отсюда следует, что между двумя положительными корнями μ_i и μ_{i+1} ($\mu_{i+1} > \mu_i > \nu$) функции $J_\nu(x)$ производная $\frac{d}{dx}\left[\frac{xJ'_\nu(x)}{J_\nu(x)}\right] < 0$. Следовательно, функция $\frac{xJ'_\nu(x)}{J_\nu(x)}$ постоянно убывает от $+\infty$ до $-\infty$, когда x возрастает от μ_i до μ_{i+1}, и поэтому она принимает любое значение один и только один раз. Отсюда вытекает, что уравнение (40) имеет один и только один корень в промежутке (μ_i, μ_{i+1}). Итак, имеем следующий результат: *если* $\nu > -1$ и $\frac{\alpha}{\beta} + \nu \geqslant 0$, *то все корни уравнения* (40) *вещественны.*

Пусть теперь $k = \frac{\mu}{l}$, где μ — положительный корень уравнения (40). Возьмем формулу (33), в которой положим $k_1 = k$ и k_2 будем считать переменным и стремящимся к k, тогда получим

$$\int_0^l xJ_\nu(kx)\,J_\nu(k_2x)\,dx = \frac{l\,[kJ'_\nu(\mu)\,J_\nu(k_2l) - k_2J'_\nu(k_2l)\,J_\nu(\mu)]}{k_2^2 - k^2}.$$

При $k_2 = k$ правая часть этого равенства становится неопределенной. Раскрыв эту неопределенность по правилу Лопиталя, получим

$$\int_0^l xJ_\nu^2\left(\mu\frac{x}{l}\right)dx = \frac{l\,[\mu J'^2_\nu(\mu) - J'_\nu(\mu)\,J_\nu(\mu) - \mu J''_\nu(\mu)\,J_\nu(\mu)]}{2k}$$

или, в силу уравнения

$$J''_\nu(\mu) + \frac{1}{\mu}J'_\nu(\mu) + \left(1 - \frac{\nu^2}{\mu^2}\right)J_\nu(\mu) = 0,$$

придем после простых преобразований к формуле

$$\int_0^l xJ_\nu^2\left(\mu\frac{x}{l}\right)dx = \frac{l^2}{2}\left[J'^2_\nu(\mu) + \left(1 - \frac{\nu^2}{\mu^2}\right)J_\nu^2(\mu)\right],$$

и, наконец, приняв во внимание, что

$$J'_\nu(\mu) = -\frac{\alpha}{\beta\mu}J_\nu(\mu),$$

окончательно получим

$$\int_0^l xJ_\nu^2\left(\mu\frac{x}{l}\right)dx = \frac{l^2}{2}\left(1 + \frac{\alpha^2 - \beta^2\nu^2}{\beta^2\mu^2}\right)J_\nu^2(\mu), \tag{41}$$

где μ — положительный корень уравнения (40).