§ 4. Разложение произвольной функции в ряд по функциям Бесселя

Пусть произвольная функция $f(x)$ представима в виде ряда

$$f(x)=\sum_{i=1}^{\infty} a_i J_\nu\left(\mu_i \frac{x}{l}\right) \quad (\nu>-1), \tag{42}$$

где $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots$ — положительные корни уравнения $J_\nu(x)=0$, расположенные в порядке возрастания.

Для определения коэффициентов a_i умножим обе части разложения (42) на $xJ_\nu\left(\mu_i \frac{x}{l}\right)$ и проинтегрируем по отрезку $[0, l]$, считая при этом возможным почленное интегрирование. Тогда, приняв во внимание формулу (39), найдем, что

$$a_i=\frac{2}{l^2 J_{\nu+1}^2(\mu_i)} \int_0^l x f(x)\, J_\nu\left(\mu_i \frac{x}{l}\right) dx. \tag{43}$$

Разложение (42), в котором коэффициенты a_i определяются по формуле (43), называется разложением функции $f(x)$ *в ряд Фурье — Бесселя.*

В задачах математической физики часто встречаются следующие ряды по функциям Бесселя:

$$f(x)=\sum_{i=1}^{\infty} b_i J_\nu\left(\mu_i \frac{x}{l}\right), \tag{44}$$

где $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots$ — положительные корни уравнения

$$\alpha J_\nu(x)+\beta x J_\nu'(x)=0, \tag{40}$$

расположенные в порядке возрастания, причем $\frac{\alpha}{\beta}+\nu>0$.

Коэффициенты b_i в силу ортогональности функций Бесселя и формулы (41) определяются по формуле

$$b_i=\frac{2}{l^2\left(1+\frac{\alpha^2-\beta^2\nu^2}{\beta^2\mu_i^2}\right) J_\nu^2(\mu_i)} \int_0^l x f(x)\, J_\nu\left(\mu_i \frac{x}{l}\right) dx. \tag{45}$$

Разложение (44), в котором коэффициенты b_i определяются по формуле (45), называется разложением функции $f(x)$ *в ряд Дини — Бесселя.*

Если $\frac{\alpha}{\beta}+\nu=0$, то, как будет показано ниже [см. формулу (49)], x^ν ортогональна к функциям $J_\nu\left(\mu_i \frac{x}{l}\right)$ с весом x на отрезке $[0, l]$, а поэтому разложение (44) должно быть заменено следующим:

$$f(x)=b_0x^\nu+\sum_{i=1}^{\infty} b_i J_\nu\left(\mu_i \frac{x}{l}\right). \tag{46}$$

В этом случае уравнение (40) можно записать в следующем виде:

$$J'_\nu(x)=\frac{\nu}{x}J_\nu(x)$$

или, в силу формулы (22)

$$J'_\nu(x)=-J_{\nu+1}(x)+\frac{\nu J_\nu(x)}{x},$$

будем иметь

$$J_{\nu+1}(x)=0, \tag{47}$$

т. е. μ_1, μ_2, μ_3, ... будут корнями уравнения (47).

Для определения коэффициента b_0 умножим обе части разложения (46) на $x^{\nu+1}$ и проинтегрируем по x от 0 до l, считая при этом возможным почленное интегрирование. Тогда получим

$$\int_0^l x^{\nu+1}f(x)\,dx=\frac{b_0l^{2\nu+2}}{2\nu+2}+\sum_{i=1}^{\infty} b_i\int_0^l x^{\nu+1}J_\nu\left(\mu_i\frac{x}{l}\right)dx. \tag{48}$$

Ранее мы имели формулу

$$x^{\nu+1}J_\nu(x)=\frac{d}{dx}\left[x^{\nu+1}J_{\nu+1}(x)\right]$$

или

$$x^{\nu+1}J_\nu(xt)=\frac{1}{t}\cdot\frac{d}{dx}\left[x^{\nu+1}J_{\nu+1}(xt)\right].$$

Интегрируя это тождество, получим

$$\int_0^l x^{\nu+1}J_\nu(xt)\,dx=\frac{l^{\nu+1}}{t}J_{\nu+1}(tl).$$

Полагая здесь $t=\frac{\mu_i}{l}$, где μ_i — корень уравнения (47), будем иметь

$$\int_0^l x^{\nu+1}J_\nu\left(\mu_i\frac{x}{l}\right)dx=0; \tag{49}$$

тогда из формулы (48), в силу (49), вытекает, что

$$b_0=\frac{2(\nu+1)}{l^{2(\nu+1)}}\int_0^l x^{\nu+1}f(x)\,dx. \tag{50}$$

Коэффициенты b_i $(i=1, 2, 3, \ldots)$ определяются по прежним формулам (45), что непосредственно следует из равенства (49).