§ 5. Некоторые интегральные представления функций Бесселя

Функции Бесселя допускают различные представления в виде определенных и контурных интегралов. Одно из наиболее простых интегральных представлений для функций Бесселя принадлежит Пуассону. Оно может быть получено следующим образом. Мы имеем

$$J_\nu(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k}}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(\nu+k+1)}. \tag{51}$$

Умножив числитель и знаменатель общего члена этого ряда на $\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)$ и приняв во внимание, что

$$\Gamma(k+1)\,\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}\,2^{-2k}(2k)!,$$

получим

$$\frac{(-1)^k\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k}}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(\nu+k+1)}=\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\,\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}\,\frac{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\nu+k+1)}$$

или, в силу известной формулы

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m\varphi\,\sin^n\varphi\,d\varphi=\frac{1}{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+n+2}{2}\right)},$$

получим

$$\frac{(-1)^k\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k}}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(\nu+k+1)}=\frac{2\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\,\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2\nu}\varphi\,\sin^{2k}\varphi\,d\varphi. \tag{52}$$

Вследствие равенства (52) ряд (51) принимает вид

$$J_\nu(x)=\frac{2\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2\nu}\varphi\,\sin^{2k}\varphi\,d\varphi.$$

Переставив знак суммы и интеграла, получим

$$J_\nu(x)=\frac{2\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2\nu}\varphi\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k}\sin^{2k}\varphi}{(2k)!}\,d\varphi. \tag{53}$$

Эта перестановка порядка интегрирования и суммирования законна ввиду равномерной сходимости ряда, находящегося под знаком интеграла. Этот ряд легко суммируется: он равен $\cos(x\sin\varphi)$. Таким образом, окончательно имеем формулу Пуассона:

$$J_\nu(x) = \frac{2\left(\frac{x}{2}\right)^\nu}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x\sin\varphi)\cos^{2\nu}\varphi\, d\varphi, \tag{54}$$

причем для сходимости интеграла должно быть $\operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}$, тогда как x может иметь любое вещественное или комплексное значение.

Введя новую переменную интегрирования с помощью подстановки $t = \sin\varphi$, можно (54) представить в виде

$$J_\nu(x) = \frac{2\left(\frac{x}{2}\right)^\nu}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} \int_0^1 (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} \cos xt\, dt.$$

Ввиду четности подынтегральной функции и нечетности функции $(1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\sin xt$ можем написать также:

$$J_\nu(x) = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^\nu}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} \int_{-1}^1 (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} e^{ixt}\, dt. \tag{55}$$

С помощью формулы Пуассона легко можно оценить $J_\nu(x)$ при любом вещественном x. Действительно, приняв во внимание, что $|\cos(x\sin\varphi)| \leqslant 1$, из (54) получим

$$|J_\nu(x)| \leqslant \frac{2\left|\frac{x}{2}\right|^\nu}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2\nu}\varphi\, d\varphi.$$

Правая часть последнего неравенства, как это видно из (52), есть не что иное, как абсолютная величина первого члена разложения $J_\nu(x)$. Таким образом, получается простое неравенство, справедливое при любом вещественном x и $\nu > -\frac{1}{2}$:

$$|J_\nu(x)| \leqslant \frac{\left|\frac{x}{2}\right|^\nu}{\Gamma(\nu+1)}.$$

Из других представлений функций Бесселя рассмотрим представление пригодное, однако, только для функций $J_n(x)$ с целым значком, которое может быть получено следующим образом. Перемножив ряды

$$e^{\frac{xt}{2}}=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^s}{s!}t^s,\quad e^{-\frac{x}{2t}}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^k}{k!}t^{-k},$$

которые при $|t|>0$ сходятся абсолютно, так что перемножение законно, и группируя результат по степеням t, получим

$$e^{\frac{1}{2}x\left(t-\frac{1}{t}\right)}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}a_m t^m, \tag{56}$$

причем a_m при $m\geqslant 0$ получается равным

$$a_m=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{m+2k}}{k!\,(m+k)!}=J_m(x),$$

тогда как при $m<0$ будет, если положить $-m=n$,

$$a_m=a_{-n}=\sum_{k=n}^{\infty}(-1)^k\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2k}}{k!\,(k-n)!}=$$

$$=\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^{s+n}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2s}}{(s+n)!\,s!}=(-1)^n J_n(x)=J_m(x).$$

Теперь выражение (56) можно переписать так:

$$e^{\frac{1}{2}x\left(t-\frac{1}{t}\right)}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}J_m(x)\,t^m. \tag{57}$$

Функцию $e^{\frac{1}{2}x\left(t-\frac{1}{t}\right)}$ называют *производящей функцией* для функций Бесселя с целым значком.

В силу соотношения $J_{-m}(x)=(-1)^m J_m(x)$, формулу (57) можно переписать так:

$$e^{\frac{1}{2}x\left(t-\frac{1}{t}\right)}=J_0(x)+\sum_{m=1}^{\infty}J_m(x)\left[t^m+(-1)^m t^{-m}\right].$$

Положив здесь $t=e^{i\varphi}$, получим

$$e^{ix\sin\varphi}=J_0(x)+\sum_{m=1}^{\infty}J_m(x)\left[e^{im\varphi}+(-1)^m e^{-im\varphi}\right].$$

Умножим обе части последнего равенства на $e^{-in\varphi}$, где n — некоторое целое положительное число, и проинтегрируем по φ в пределах от $-\pi$ до π. Тогда, в силу

$$\int_{-\pi}^{\pi}e^{i(m-n)\varphi}\,d\varphi=\begin{cases}0 \text{ при } m\neq n,\\ 2\pi \text{ при } m=n,\end{cases}$$

получим

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(x \sin \varphi - n\varphi)} \, d\varphi. \tag{58}$$

Отделяя в правой части вещественную и мнимую части и пользуясь свойствами интегралов от четных и нечетных функций, легко находим

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} \cos(x \sin \varphi - n\varphi) \, d\varphi. \tag{59}$$

Заметим, что формула (59) не имеет места, если значок n не есть целое число. В данном случае мы имеем более сложную формулу, а именно:

$$J_\nu(x) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} \cos(x \sin \varphi - \nu\varphi) \, d\varphi - \frac{\sin \nu\pi}{\pi} \int_{0}^{\infty} e^{-\nu\varphi - x \operatorname{sh} \varphi} \, d\varphi. \tag{60}$$

причем эта формула справедлива при любом ν и $\operatorname{Re} x > 0$.

§ 6. Функции Ханкеля

Наряду с функциями Бесселя $J_\nu(x)$ большое значение для приложений имеют другие частные решения уравнения Бесселя. К их числу относятся функции Ханкеля первого и второго рода $H_\nu^{(1)}(x)$ и $H_\nu^{(2)}(x)$, определяемые равенствами:

$$H_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x) + iY_\nu(x), \quad H_\nu^{(2)}(x) = J_\nu(x) - iY_\nu(x). \tag{61}$$

При вещественных значениях x и ν функции Ханкеля принимают комплексно-сопряженные значения:

$$H_\nu^{(2)}(x) = \overline{H_\nu^{(1)}(x)}.$$

При ν, не равном целому числу, функцию $Y_\nu(x)$ в формулах (61) заменим ее выражением (17). Тогда получим

$$H_\nu^{(1)}(x) = i \, \frac{J_\nu(x) e^{-i\nu\pi} - J_{-\nu}(x)}{\sin \nu\pi},$$

$$H_\nu^{(2)}(x) = -i \, \frac{J_\nu(x) e^{i\nu\pi} - J_{-\nu}(x)}{\sin \nu\pi}. \tag{62}$$

Формулы (62) остаются в силе и для целых значений $\nu = n$, если под правой частью понимать тот предел, к которому она стремится при $\nu \to n$. Если $\nu = n + \frac{1}{2}$, то функции Ханкеля выражаются в конечном виде через элементарные функции. В част-