получим

$$J_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(x\sin\varphi-n\varphi)}\,d\varphi. \tag{58}$$

Отделяя в правой части вещественную и мнимую части и пользуясь свойствами интегралов от четных и нечетных функций, легко находим

$$J_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(x\sin\varphi-n\varphi)\,d\varphi. \tag{59}$$

Заметим, что формула (59) не имеет места, если значок n не есть целое число. В данном случае мы имеем более сложную формулу, а именно:

$$J_\nu(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(x\sin\varphi-\nu\varphi)\,d\varphi-\frac{\sin\nu\pi}{\pi}\int_0^{\infty}e^{-\nu\varphi-x\,\mathrm{sh}\,\varphi}\,d\varphi. \tag{60}$$

причем эта формула справедлива при любом ν и $\mathrm{Re}\, x>0$.

§ 6. Функции Ханкеля

Наряду с функциями Бесселя $J_\nu(x)$ большое значение для приложений имеют другие частные решения уравнения Бесселя. К их числу относятся функции Ханкеля первого и второго рода $H_\nu^{(1)}(x)$ и $H_\nu^{(2)}(x)$, определяемые равенствами:

$$H_\nu^{(1)}(x)=J_\nu(x)+iY_\nu(x),\quad H_\nu^{(2)}(x)=J_\nu(x)-iY_\nu(x). \tag{61}$$

При вещественных значениях x и ν функции Ханкеля принимают комплексно-сопряженные значения:

$$H_\nu^{(2)}(x)=\overline{H_\nu^{(1)}(x)}.$$

При ν, не равном целому числу, функцию $Y_\nu(x)$ в формулах (61) заменим ее выражением (17). Тогда получим

$$H_\nu^{(1)}(x)=i\,\frac{J_\nu(x)\,e^{-i\nu\pi}-J_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi},$$
$$H_\nu^{(2)}(x)=-i\,\frac{J_\nu(x)\,e^{i\nu\pi}-J_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi}. \tag{62}$$

Формулы (62) остаются в силе и для целых значений $\nu=n$, если под правой частью понимать тот предел, к которому она стремится при $\nu\to n$. Если $\nu=n+\frac{1}{2}$, то функции Ханкеля выражаются в конечном виде через элементарные функции. В частности, при $\nu=\frac{1}{2}$

$$H^{(1)}_{\frac{1}{2}}(x)=i\left[-iJ_{\frac{1}{2}}(x)-J_{-\frac{1}{2}}(x)\right]=$$

$$=-i\sqrt{\frac{2}{\pi x}}(\cos x+i\sin x)=-i\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,e^{ix}.$$

Аналогично,

$$H^{(2)}_{\frac{1}{2}}(x)=i\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,e^{-ix}.$$

Из формул (62) непосредственно вытекают следующие соотношения между функциями Ханкеля, у которых значок отличается лишь знаком:

$$H^{(1)}_{-\nu}(x)=e^{i\nu\pi}H^{(1)}_{\nu}(x),\quad H^{(2)}_{-\nu}(x)=e^{-i\nu\pi}H^{(2)}_{\nu}(x). \tag{63}$$

Далее, так как функции Ханкеля выражаются линейно через функции $J_\nu(x)$ и $Y_\nu(x)$, то они удовлетворяют тем же рекуррентным формулам, что и эти функции, а именно:

$$\frac{dH^{(1)}_{\nu}(x)}{dx}=-H^{(1)}_{\nu+1}(x)+\frac{\nu}{x}H^{(1)}_{\nu}(x),$$

$$\frac{dH^{(2)}_{\nu}(x)}{dx}=-H^{(2)}_{\nu+1}(x)+\frac{\nu}{x}H^{(2)}_{\nu}(x),$$

$$\frac{dH^{(1)}_{\nu}(x)}{dx}=H^{(1)}_{\nu-1}(x)-\frac{\nu}{x}H^{(1)}_{\nu}(x),\quad \frac{dH^{(2)}_{\nu}(x)}{dx}=H^{(2)}_{\nu-1}(x)-\frac{\nu}{x}H^{(2)}_{\nu}(x),$$

$$H^{(1)}_{\nu+1}(x)=\frac{2\nu}{x}H^{(1)}_{\nu}(x)-H^{(1)}_{\nu-1}(x),\qquad H^{(2)}_{\nu+1}(x)=\frac{2\nu}{x}H^{(2)}_{\nu}(x)-H^{(2)}_{\nu-1}(x).$$

В заключение этого параграфа приведем без доказательства асимптотические представления функций Ханкеля:

$$\left.\begin{aligned} H^{(1)}_{\nu}(x)&=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,e^{i\left(x-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}\left[1+O(x^{-1})\right],\\ H^{(2)}_{\nu}(x)&=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,e^{-i\left(x-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}\left[1+O(x^{-1})\right]. \end{aligned}\right\}\quad (x>0) \tag{64}$$

§ 7. Функции Бесселя мнимого аргумента

Во многих задачах математической физики встречается уравнение

$$x^2y''+xy'-(x^2+\nu^2)\,y=0. \tag{65}$$

Нетрудно проверить, что это уравнение получается из уравнения Бесселя после замены в последнем x на ix Следовательно, функция $J_\nu(ix)$ есть частное решение уравнения (65). Так как урав-