ности, при $\nu = \frac{1}{2}$

$$H^{(1)}_{\frac{1}{2}}(x) = i\left[-iJ_{\frac{1}{2}}(x) - J_{-\frac{1}{2}}(x)\right] =$$

$$= -i\sqrt{\frac{2}{\pi x}}(\cos x + i\sin x) = -i\sqrt{\frac{2}{\pi x}}e^{ix}.$$

Аналогично,

$$H^{(2)}_{\frac{1}{2}}(x) = i\sqrt{\frac{2}{\pi x}}e^{-ix}.$$

Из формул (62) непосредственно вытекают следующие соотношения между функциями Ханкеля, у которых значок отличается лишь знаком:

$$H^{(1)}_{-\nu}(x) = e^{i\nu\pi}H^{(1)}_{\nu}(x), \quad H^{(2)}_{-\nu}(x) = e^{-i\nu\pi}H^{(2)}_{\nu}(x). \tag{63}$$

Далее, так как функции Ханкеля выражаются линейно через функции $J_\nu(x)$ и $Y_\nu(x)$, то они удовлетворяют тем же рекуррентным формулам, что и эти функции, а именно:

$$\frac{dH^{(1)}_{\nu}(x)}{dx} = -H^{(1)}_{\nu+1}(x) + \frac{\nu}{x}H^{(1)}_{\nu}(x),$$

$$\frac{dH^{(2)}_{\nu}(x)}{dx} = -H^{(2)}_{\nu+1}(x) + \frac{\nu}{x}H^{(2)}_{\nu}(x),$$

$$\frac{dH^{(1)}_{\nu}(x)}{dx} = H^{(1)}_{\nu-1}(x) - \frac{\nu}{x}H^{(1)}_{\nu}(x), \quad \frac{dH^{(2)}_{\nu}(x)}{dx} = H^{(2)}_{\nu-1}(x) - \frac{\nu}{x}H^{(2)}_{\nu}(x),$$

$$H^{(1)}_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x}H^{(1)}_{\nu}(x) - H^{(1)}_{\nu-1}(x), \quad H^{(2)}_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x}H^{(2)}_{\nu}(x) - H^{(2)}_{\nu-1}(x).$$

В заключение этого параграфа приведем без доказательства асимптотические представления функций Ханкеля:

$$\left.\begin{aligned} H^{(1)}_{\nu}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,e^{i\left(x-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}\left[1 + O(x^{-1})\right], \\ H^{(2)}_{\nu}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,e^{-i\left(x-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}\left[1 + O(x^{-1})\right]. \end{aligned}\right\} \quad (x > 0) \tag{64}$$

§ 7. Функции Бесселя мнимого аргумента

Во многих задачах математической физики встречается уравнение

$$x^2y'' + xy' - (x^2 + \nu^2)\,y = 0. \tag{65}$$

Нетрудно проверить, что это уравнение получается из уравнения Бесселя после замены в последнем x на ix Следовательно, функция $J_\nu(ix)$ есть частное решение уравнения (65). Так как уравнение (65) однородно, то произведение $J_\nu(ix)$ на произвольную постоянную есть также решение данного уравнения. Выберем эту постоянную равной $i^{-\nu}$ и введем обозначение

$$I_\nu(x) = i^{-\nu} J_\nu(ix). \tag{66}$$

При указанном выборе постоянной рассматриваемое нами частное решение уравнения (65) будет выражаться рядом

$$I_\nu(x) = \sum_{k}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k}}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)}. \tag{67}$$

Функция $I_{-\nu}(x)$ также является решением уравнения (65), и если ν не целое число, то $I_\nu(x)$ и $I_{-\nu}(x)$ суть два линейно-независимых решения уравнения (65). Если $\nu = n$ — целое число, то функции $I_\nu(x)$ и $I_{-\nu}(x)$ линейно-зависимы, так как

$$I_\nu(x) = I_{-\nu}(x), \tag{68}$$

что непосредственно вытекает из формул (66) и (16).

Для получения общего решения уравнения (65) надо найти другое, линейно-независимое от $I_\nu(x)$, частное решение.

Это частное решение, носящее название *функции Макдональда*, берется в виде

$$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)}{\sin \nu\pi}. \tag{69}$$

При целом $\nu = n$ правая часть равенства (69) принимает неопределенный вид, что легко следует из соотношения (68). Раскрывая неопределенность по правилу Лопиталя, получим следующее выражение для функции $K_n(x)$ при целом n:

$$K_n(x) = -I_n(x)\ln\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2k} +$$
$$+ \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}}{k!\,(k+n)!}\left[\frac{\Gamma'(k+1)}{\Gamma(k+1)} + \frac{\Gamma'(k+n+1)}{\Gamma(k+n+1)}\right]. \tag{70}$$

В частности,

$$K_0(x) = -I_0(x)\ln\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}}{(k!)^2} \frac{\Gamma'(k+1)}{\Gamma(k+1)}. \tag{71}$$

Отметим, что $K_n(x) \to \infty$ при $x \to 0$.

Так как $I_\nu(x)$ и $K_\nu(x)$ суть два линейно-независимых решения уравнения (65) при любом значении ν, то его общее решение можно написать в таком виде:

$$y = C_1 I_\nu(x) + C_2 K_\nu(x), \tag{72}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

В заключение заметим, что $I_\nu(x)$ растет неограниченно при $x \to +\infty$, а функция $K_\nu(x)$ стремится к нулю при $x \to +\infty$, как это видно из асимптотических представлений этих функций, приводимых здесь без доказательства:

$$\begin{aligned} I_\nu(x) &= \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}[1 + O(x^{-1})], \\ K_\nu(x) &= \sqrt{\frac{\pi}{2x}}e^{-x}[1 + O(x^{-1})]. \end{aligned} \qquad (x > 0) \tag{73}$$

ЗАДАЧИ

1. Доказать формулы.

$$\frac{d}{dx}\left[x^{\frac{\nu}{2}} J_\nu(2\sqrt{x})\right] = x^{\frac{\nu-1}{2}} J_{\nu-1}(2\sqrt{x}),$$

$$\frac{d}{dx}\left[x^{-\frac{\nu}{2}} J_\nu(2\sqrt{x})\right] = -x^{-\frac{\nu-1}{2}} J_{1+\nu}(2\sqrt{x}).$$

2. Разложить в ряд Фурье — Бесселя функцию $f(x) = x^\nu$ $(0 < x < 1)$.
Ответ:

$$x^\nu = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_\nu(\mu_k x)}{M_k\, J_{\nu+1}(\mu_k)} \quad (\nu > -1).$$

3. Разложить в интервале (0,1) функцию $f(x) = 1$ в ряд по функциям

$$J_0(\mu_1 x), \quad J_0(\mu_2 x), \quad \ldots,$$

где μ_1, μ_2, ... — положительные корни уравнения.

$$\mu J_1(\mu) - \rho J_0(\mu) = 0 \qquad (\rho > 0).$$

Ответ:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\rho}{\mu_k^2 + \rho^2} \cdot \frac{J_0(\mu_k x)}{J_0(\mu_k)}.$$

4. Доказать справедливость разложения

$$e^{ix\sin\varphi} = J_0(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(x)\cos 2n\varphi + 2i\sum_{n=0}^{\infty} J_{2n+1}(x)\sin(2n+1)\varphi$$

и получить отсюда формулы Бесселя

$$J_{2n}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x\sin\varphi)\cos 2n\varphi\, d\varphi, \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

$$J_{2n+1}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(x\sin\varphi)\sin(2n+1)\varphi\, d\varphi.$$

Указание. Воспользоваться формулой (57).

5. Доказать справедливость формул:

$$\int_0^\infty e^{-ax} J_\nu(bx)\, x^{\nu+1}\, dx = \frac{2a(2b)^\nu \Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,(a^2+b^2)^{\nu+\frac{3}{2}}}, \quad (\nu > -1)$$

$$\int_0^\infty e^{-a^2x^2} x^{\nu+1} J_\nu(bx)\, dx = \frac{b^\nu}{(2a^2)^{\nu+1}} e^{-\frac{b^2}{4a^2}}.$$

6. Доказать, что

$$\int_0^x xJ_0(x)\, dx = xJ_1(x),$$

$$\int_0^x x^3 J_0(x)\, dx = 2x^2 J_0(x) + (x^3 - 4x) J_1(x).$$

Указание. Воспользоваться дифференциальным уравнением для функции $J_0(x)$.

Глава XIV

МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ НИТИ, ПОДВЕШЕННОЙ ЗА ОДИН КОНЕЦ

§ 1. Свободные колебания подвешенной нити

Рассмотрим тяжелую однородную гибкую нить длины l. Нить закреплена верхним концом в точке $x=l$ и совершает колебания под действием силы тяжести. Максимальное отклонение ее нижнего конца $x=0$ от вертикали равно h. За ось x примем вертикальное направление, вдоль которого расположится нить, когда под действием своего веса она займет прямолинейное положение. Обозначим через $u=u(x, t)$ отклонение точек нити от положения равновесия в момент времени t (рис. 22).

Будем рассматривать *малые колебания* такие, что можно пренебречь квадратом производной $\frac{\partial u}{\partial x}$ по сравнению с единицей. Тогда

$$\sin\alpha(x) = \frac{\operatorname{tg}\alpha(x)}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha(x)}} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}} \approx \frac{\partial u}{\partial x},$$

где $\alpha(x)$ — угол между касательной в точке с абсциссой x к нити в момент времени t и положительным направлением оси Ox.

Натяжение T нити в точке N с абсциссой x равно весу части нити, расположенной вниз от N, т. е. $T=g\rho x$, где ρ — линейная