Указание. Воспользоваться формулой (57).

5. Доказать справедливость формул:

$$\int_0^\infty e^{-ax} J_\nu(bx)\, x^{\nu+1}\, dx = \frac{2a(2b)^\nu \Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,(a^2+b^2)^{\nu+\frac{3}{2}}}, \quad (\nu > -1)$$

$$\int_0^\infty e^{-a^2x^2} x^{\nu+1} J_\nu(bx)\, dx = \frac{b^\nu}{(2a^2)^{\nu+1}} e^{-\frac{b^2}{4a^2}}.$$

6. Доказать, что

$$\int_0^x xJ_0(x)\, dx = xJ_1(x),$$

$$\int_0^x x^3 J_0(x)\, dx = 2x^2 J_0(x) + (x^3 - 4x) J_1(x).$$

Указание. Воспользоваться дифференциальным уравнением для функции $J_0(x)$.

Глава XIV

МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ НИТИ, ПОДВЕШЕННОЙ ЗА ОДИН КОНЕЦ

§ 1. Свободные колебания подвешенной нити

Рассмотрим тяжелую однородную гибкую нить длины l. Нить закреплена верхним концом в точке $x = l$ и совершает колебания под действием силы тяжести. Максимальное отклонение ее нижнего конца $x = 0$ от вертикали равно h. За ось x примем вертикальное направление, вдоль которого расположится нить, когда под действием своего веса она займет прямолинейное положение. Обозначим через $u = u(x, t)$ отклонение точек нити от положения равновесия в момент времени t (рис. 22).

Будем рассматривать *малые колебания* такие, что можно пренебречь квадратом производной $\frac{\partial u}{\partial x}$ по сравнению с единицей. Тогда

$$\sin\alpha(x) = \frac{\operatorname{tg}\alpha(x)}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha(x)}} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}} \approx \frac{\partial u}{\partial x},$$

где $\alpha(x)$ — угол между касательной в точке с абсциссой x к нити в момент времени t и положительным направлением оси Ox.

Натяжение T нити в точке N с абсциссой x равно весу части нити, расположенной вниз от N, т. е. $T = g\rho x$, где ρ — линейная плотность нити, а g — ускорение силы тяжести. Выделим произвольный элемент нити MM_1, длиной dx, который при равновесии занимал положение NN_1 (см. рис. 22). Горизонтальная составляющая равнодействующей сил натяжения, действующих на концы элемента MM_1, выражается разностью

$$\left(g\rho x\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{M_1}-\left(g\rho x\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{M},$$

которая с точностью до бесконечно малых высшего порядка равна выражению

$$g\rho\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx. \qquad (1)$$

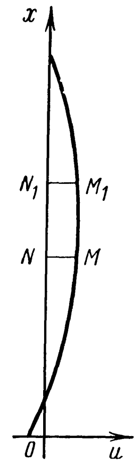

Рис 22

Вертикальная составляющая равна

$$(g\rho x\cos\alpha(x))_{M_1}-(g\rho x\cos\alpha(x))_M\approx g\rho\,dx,$$

так как в силу малости колебаний нити

$$\cos\alpha(x)=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}}\approx 1.$$

Движение элемента MM_1 нити можно рассматривать как свободное, если сохранить силы натяжения, действующие в точках M и M_1, и учесть силу тяжести, направленную вниз и имеющую величину — $g\rho\,dx$. Вертикальная составляющая равнодействующей сил натяжения и сила тяжести взаимно уничтожаются. Поэтому можно считать, что элемент нити MM_1 движется под действием горизонтальной составляющей силы (1). Приравняв эту силу произведению из массы ρdx элемента нити на его ускорение $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, получим искомое дифференциальное уравнение малых колебаний подвешенной нити

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \qquad (2)$$

где $a=\sqrt{g}$.

Задача о колебании подвешенной нити сводится к интегрированию уравнения (2) с граничным условием

$$u|_{x=l}=0 \qquad (3)$$

и с начальными условиями

$$u|_{t=0}=f(x), \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=F(x). \qquad (4)$$

Имея в виду применить способ Фурье к решению задачи (2) — (4), сначала преобразуем уравнение (2) к новой переменной ξ, положив

$$\xi = \sqrt{x},$$

тогда преобразованное уравнение примет следующий вид:

$$\frac{1}{4\xi}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\xi \frac{\partial u}{\partial \xi}\right) = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \tag{5}$$

Будем искать решение этого уравнения в виде

$$u = w(\xi)\, T(t). \tag{6}$$

Подставляя (6) в (5), получим

$$\frac{1}{\xi w(\xi)} \cdot \frac{d}{d\xi}\left(\xi \frac{dw}{d\xi}\right) = \left(\frac{2}{a}\right)^2 \frac{T''(t)}{T(t)}.$$

Обозначая обе части этого равенства через постоянную $-\lambda^2$, получим два уравнения:

$$\frac{d}{d\xi}\left(\xi \frac{dw}{d\xi}\right) + \lambda^2 \xi w - 0, \tag{7}$$

$$T''(t) + \left(\frac{a\lambda}{2}\right)^2 T(t) = 0. \tag{8}$$

Общее решение уравнения (7) имеет вид (см. гл. XIII, § 1):

$$w(\xi) = C_1 J_0(\lambda\xi) + C_2 Y_0(\lambda\xi) \tag{9}$$

Так как $Y_0(\lambda\xi) \to \infty$ при $\xi \to 0$, то должно быть $C_2 = 0$. Граничное условие (3) даст

$$J_0(\lambda\sqrt{l}) = 0.$$

В гл. XIII мы показали, что трансцендентное уравнение

$$J_0(\mu) = 0$$

имеет бесчисленное множество вещественных корней: $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots$ Отсюда вытекает что собственные числа задачи определяются равенством

$$\lambda_k^2 = \frac{\mu_k^2}{l} \qquad (k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots). \tag{10}$$

Собственные функции, соответствующие этим собственным числам, имеют следующий вид:

$$w_k(x) = J_0\left(\mu_k \sqrt{\frac{x}{l}}\right). \tag{11}$$

Обращаясь теперь к уравнению (8), мы видим, что его общее решение имеет вид

$$T_k(t) = A_k \cos\frac{a\mu_k t}{2\sqrt{l}} + B_k \sin\frac{a\mu_k t}{2\sqrt{l}}$$

и, следовательно, ряд

$$u(x,\ t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\cos\frac{a\mu_k t}{2\sqrt{l}}+B_k\sin\frac{a\mu_k t}{2\sqrt{l}}\right)J_0\left(\mu_k\sqrt{\frac{x}{l}}\right) \qquad (12)$$

даст решение уравнения (2) при граничном условии (3).

Теперь остается определить постоянные A_k и B_k так, чтобы удовлетворялись и начальные условия (4). Положив в разложении (12) $t=0$, найдем, что

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}A_k J_0\left(\mu_k\sqrt{\frac{x}{l}}\right). \qquad (13)$$

Сравнивая это разложение с формулами (42) и (43) предыдущей главы, легко убедимся, что

$$A_k=\frac{1}{lJ_1^2(\mu_k)}\int_0^l f(x)\,J_0\left(\mu_k\sqrt{\frac{x}{l}}\right)dx. \qquad (14)$$

Рассуждая аналогичным образом, найдем выражения и для коэффициентов B_k, а именно

$$B_k=\frac{2}{a\sqrt{l}\mu_k J_1^2(\mu_k)}\int_0^l F(x)\,J_0\left(\mu_k\sqrt{\frac{x}{l}}\right)dx. \qquad (15)$$

Введя теперь обозначения

$$A_k=N_k\sin\varphi_k, \qquad B_k=N_k\cos\varphi_k,$$

перепишем найденное нами решение (12) в форме:

$$u(x,\ t)=\sum_{k=1}^{\infty}N_k J_0\left(\mu_k\sqrt{\frac{x}{l}}\right)\sin\left(\frac{a\mu_k t}{2\sqrt{l}}+\varphi_k\right), \qquad (16)$$

откуда ясно, что малые колебания подвешенной нити можно рассматривать как движение, складывающееся из бесчисленного множества гармонических колебаний.

Период основного тона таких колебаний выражается формулой

$${}_1=\frac{4\pi}{\mu_1}\sqrt{\frac{l}{g}}, \qquad (17)$$

где

$$\mu_1=2{,}40483.$$

Далее формула (16) показывает, что амплитуда k-го обертона обращается в нуль в тех точках, которые определяются уравнением

$$J_0\left(\mu_k\sqrt{\frac{x}{l}}\right)=0,$$

откуда ясно, что мы будем иметь k узловых точек:

$$x_1=\left(\frac{\mu_1}{\mu_k}\right)^2 l, \qquad x_2=\left(\frac{\mu_2}{\mu_k}\right)^2 l, \ \ldots, \qquad x_{k-1}=\left(\frac{\mu_{k-1}}{\mu_k}\right) l, \qquad x_k=l.$$

§ 2. Вынужденные колебания подвешенной нити

Предположим теперь, что на подвешенную нить действует непрерывно распределенная горизонтальная сила $\Phi(x,t)$, рассчитанная на единицу длины. Тогда уравнение вынужденных колебаний примет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial u}{\partial x}\right)+Y(x,\ t), \tag{18}$$

где

$$Y(x,\ t)=\frac{\Phi(x,\ t)}{\rho}.$$

К этому уравнению нужно присоединить граничное и начальные условия

$$u|_{x=l}=0, \tag{19}$$

$$u|_{t=0}=f(x), \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=F(x). \tag{20}$$

Применим к интегрированию этой задачи способ, изложенный в § 1 гл. XI, другими словами, будем разыскивать решение задачи (18)—(20) в виде суммы

$$u=u_1+u_2, \tag{21}$$

где u_1—решение неоднородного уравнения (18), удовлетворяющее граничному условию (19) и нулевым начальным условиям

$$u_1|_{t=0}=0, \qquad \left.\frac{\partial u_1}{\partial t}\right|_{t=0}=0, \tag{22}$$

а функция $u_2(x,\ t)$—решение однородного уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial u}{\partial x}\right), \tag{23}$$

удовлетворяющее граничному условию (19) и начальным условиям (20). Задача (23), (19), (20) рассматривалась в § 1 и ее решение было получено в виде ряда (12).

Будем искать решение $u_1(x,\ t)$ в виде ряда

$$u_1=\sum_{k=1}^{\infty}T_k(t)J_0\left(\mu_k\sqrt{\frac{x}{l}}\right), \tag{24}$$

так что граничное условие (19) удовлетворяется само собой Подставляя ряд (24) в уравнение (18) и принимая во внимание ра-