откуда ясно, что мы будем иметь k узловых точек:

$$x_1 = \left(\frac{\mu_1}{\mu_k}\right)^2 l, \qquad x_2 = \left(\frac{\mu_2}{\mu_k}\right)^2 l, \quad \ldots, \qquad x_{k-1} = \left(\frac{\mu_{k-1}}{\mu_k}\right) l, \qquad x_k = l.$$

§ 2. Вынужденные колебания подвешенной нити

Предположим теперь, что на подвешенную нить действует непрерывно распределенная горизонтальная сила $\Phi(x,t)$, рассчитанная на единицу длины. Тогда уравнение вынужденных колебаний примет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial}{\partial x}\left(x \frac{\partial u}{\partial x}\right) + Y(x, t), \tag{18}$$

где

$$Y(x, t) = \frac{\Phi(x, t)}{\rho}.$$

К этому уравнению нужно присоединить граничное и начальные условия

$$u|_{x=l} = 0, \tag{19}$$

$$u|_{t=0} = f(x), \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = F(x). \tag{20}$$

Применим к интегрированию этой задачи способ, изложенный в § 1 гл. XI, другими словами, будем разыскивать решение задачи (18)—(20) в виде суммы

$$u = u_1 + u_2, \tag{21}$$

где u_1 — решение неоднородного уравнения (18), удовлетворяющее граничному условию (19) и нулевым начальным условиям

$$u_1|_{t=0} = 0, \qquad \left.\frac{\partial u_1}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \tag{22}$$

а функция $u_2(x, t)$ — решение однородного уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial}{\partial x}\left(x \frac{\partial u}{\partial x}\right), \tag{23}$$

удовлетворяющее граничному условию (19) и начальным условиям (20). Задача (23), (19), (20) рассматривалась в § 1 и ее решение было получено в виде ряда (12).

Будем искать решение $u_1(x, t)$ в виде ряда

$$u_1 = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) J_0\left(\mu_k \sqrt{\frac{x}{l}}\right), \tag{24}$$

так что граничное условие (19) удовлетворяется само собой Подставляя ряд (24) в уравнение (18) и принимая во внимание равенство

$$\frac{d}{dx}\left\{x\,\frac{dJ_0\left(\mu_k\sqrt{\frac{x}{l}}\right)}{dx}\right\}=-\frac{1}{4}\,\frac{\mu_k^2}{l}\,J_0\left(\mu_k\sqrt{\frac{x}{l}}\right),$$

являющееся следствием соотношений (7) и (10), получим

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[T_k''(t)+\omega_k^2T(t)\right]J_0\left(\mu_k\sqrt{\frac{x}{l}}\right)=Y(x,\ t),\tag{25}$$

где положено

$$\omega_k=\frac{\mu_k a}{2\sqrt{l}}.\tag{26}$$

Разложим теперь функцию $Y(x,\ t)$ в ряд по собственным функциям $J_0\left(\mu_k\sqrt{\frac{x}{l}}\right)$, т. е. положим

$$Y(x,\ t)=\sum_{k=1}^{\infty}H_k(t)\,J_0\left(\mu_k\sqrt{\frac{x}{l}}\right).\tag{27}$$

Это разложение по виду совпадает с разложением (13) и, следовательно, коэффициенты $H_k(t)$ определяются по формуле (14):

$$H_k(t)=\frac{1}{lJ_1^2(\mu_k)}\int_0^l Y(\xi,\ t)\,J_0\left(\mu_k\sqrt{\frac{\xi}{l}}\right)d\xi.\tag{28}$$

Сравнивая разложения (25) и (27) для одной и той же функции $Y(x,\ t)$, получаем уравнение

$$T_k''(t)+\omega_k^2T_k(t)=H_k(t),\tag{29}$$

которому должны удовлетворять коэффициенты $T_k(t)$. При таком определении коэффициентов $T_k(t)$, функция (24) удовлетворяет дифференциальному уравнению (18) и граничному условию (19). Для удовлетворения же начальных условий (22) достаточно подчинить функции $T_k(t)$ условиям

$$T_k(0)=0,\quad T_k'(0)=0.\tag{30}$$

Решение уравнения (29), удовлетворяющее начальным условиям (30), дается формулой

$$T_k(t)=\frac{1}{\omega_k}\int_0^t H_k(\tau)\sin\omega_k(t-\tau)\,d\tau.$$

Подставив сюда выражение (28) для $H_k(\tau)$, получим

$$T_k(t)=\frac{1}{l\omega_kJ_1^2(\mu_k)}\int_0^t d\tau\int_0^l Y(\xi,\ \tau)\,J_0\left(\mu_k\sqrt{\frac{\xi}{l}}\right)\sin\omega_k(t-\tau)\,d\xi.$$

Из сказанного вытекает, что отклонение подвешенной нити от вертикального положения равновесия выражается формулой

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) J_0\left(\mu_k \sqrt{\frac{x}{l}}\right) + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos\frac{a\mu_k t}{2\sqrt{l}} + B_k \sin\frac{a\mu_k t}{2\sqrt{l}}\right) J_0\left(\mu_k \sqrt{\frac{x}{l}}\right), \tag{32}$$

где коэффициент $T_k(t)$, A_k и B_k определяются равенствами (31), (14) и (15), а $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots$ — положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$.

Остановимся более подробно на том случае, когда внешняя сила действует гармонически, т. е.

$$Y(x, t) = A \sin \omega t.$$

В этом случае коэффициенты $T_k(t)$ определяются по формуле

$$T_k(t) = \frac{A}{l\omega_k J_1^2(\mu_k)} \int_0^t \sin \omega_k (t-\tau) \sin \omega\tau \, d\tau \int_0^l J_0\left(\mu_k \sqrt{\frac{\xi}{l}}\right) d\xi.$$

Возьмем теперь формулу

$$\int_0^x J_0(\sqrt{x})\, dx = 2\sqrt{x} J_1(\sqrt{x}),$$

легко выводимую из разложений функций $J_0(x)$ и $J_1(x)$ в степенные ряды. С помощью этой формулы найдем, что

$$\int_0^l J_0\left(\mu_k \sqrt{\frac{\xi}{l}}\right) d\xi = \frac{2l}{\mu_k} J_1(\mu_k),$$

а так как

$$\int_0^t \sin \omega_k (t-\tau) \sin \omega\tau \, d\tau = \frac{\omega_k \sin \omega t}{\omega_k^2 - \omega^2} - \frac{\omega \sin \omega_k t}{\omega_k^2 - \omega^2},$$

то

$$T_k(t) = 4\sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \frac{A}{\mu_k^2 J_1(\mu_k)} \left[\frac{\omega_k \sin \omega t}{\omega_k^2 - \omega^2} - \frac{\omega \sin \omega_k t}{\omega_k^2 - \omega^2}\right]. \tag{33}$$

Допустим, что начальные отклонения и начальные скорости в данном случае отсутствуют и нить колеблется только вследствие действия возмущающей силы; тогда из формулы (32) и (33) вытекает, что отклонение нити от вертикального положения равновесия будет выражаться формулой

$$u(x,\ t)=4\sqrt{\frac{l}{g}}\,A\sin\omega t\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\omega_k J_0\left(\mu_k\sqrt{\frac{x}{l}}\right).}{(\omega_k^2-\omega^2)\,\mu_k^2 J_1(\mu_k)}-$$

$$-4A\omega\sqrt{\frac{l}{g}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_0\left(\mu_k\sqrt{\frac{x}{l}}\right)\sin\omega_k t}{(\omega_k^2-\omega^2)\,\mu_k^2 J_1(\mu_k)}. \tag{34}$$

Первый член правой части формулы (34) может быть упрощен.

Будем искать решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial u}{\partial x}\right)+A\sin\omega t, \tag{35}$$

удовлетворяющее условиям

$$u|_{x=0}=\text{конечной величине},\qquad u|_{x=l}=0, \tag{36}$$

в виде произведения

$$u=X(x)\sin\omega t. \tag{37}$$

Подставив (37) в уравнение (35), получим

$$\frac{d}{dx}\left(x\frac{dX}{dx}\right)+\left(\frac{\omega}{a}\right)^2 X+\frac{A}{a^2}=0. \tag{38}$$

Его общее решение имеет вид

$$X(x)=C_1J_0\left(\frac{2\omega}{a}\sqrt{x}\right)+C_2Y_0\left(\frac{2\omega}{a}\sqrt{x}\right)-\frac{A}{\omega^2}. \tag{39}$$

В силу граничных условий (36),

$$C_1=\frac{A}{\omega^2}\,\frac{1}{J_0\left(2\omega\sqrt{\frac{l}{g}}\right)},\qquad C_2=0.$$

Из полученных результатов следует, что решение (34) можно представить в виде

$$u(x,\ t)=\frac{A}{\omega^2}\left[\frac{J_0\left(2\omega\sqrt{\frac{x}{g}}\right)}{J_0\left(2\omega\sqrt{\frac{l}{g}}\right)}-1\right]\sin\ t-$$

$$-4A\omega\sqrt{\frac{l}{g}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_0\left(\mu_k\sqrt{\frac{x}{l}}\right)\sin\omega_k t}{(\omega_k^2-\omega^2)\,\mu_k^2 J_1(\mu_k)}. \tag{40}$$

В заключение заметим, что когда частота внешней возмущающей силы ω приближается к одной из частот собственных колебаний нити, то будет наблюдаться явление р е з о н а н с а.

Заметим еще, что из сравнения формул (34) и (40) вытекает следующее разложение функции $\frac{J_0(tx)}{J_0(t)}$ на рациональные дроби:

$$\frac{J_0(tx)}{J_0(t)} = 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^2}{\mu_k^2 - t^2} \cdot \frac{J_0(\mu_k x)}{\mu_k J_1(\mu_k)}, \tag{41}$$

где суммирование распространяется по всем положительным корням уравнения $J_0(x) = 0$.

ЗАДАЧА

Тяжелая однородная нить длиной l, закрепленная верхним концом $(x = l)$ на вертикальной оси, вращается вокруг этой оси с постоянной угловой скоростью ω. Вывести уравнения малых колебаний нити и доказать, что ее отклонение от положения равновесия выражается формулой

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos a\lambda_k t + B_k \sin a\lambda_k t) J_0\left(\mu_k \sqrt{\frac{x}{l}}\right),$$

где

$$A_k = \frac{1}{lJ_1^2(\mu_k)} \int_0^l f(x) J_0\left(\mu_k \sqrt{\frac{x}{l}}\right) dx,$$

$$B_k = \frac{1}{a\lambda_k l J_1^2(\mu_k)} \int_0^l F(x) J_0\left(\mu_k \sqrt{\frac{x}{l}}\right) dx, \qquad \lambda_k = \sqrt{\frac{\mu_k^2}{4l} - \left(\frac{\omega}{a}\right)^2},$$

а $\mu_1, \mu_2, \ldots$ — положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$.

Указание. Задача приводится к решению уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial}{\partial x}\left(x \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \omega^2 u, \qquad \text{где} \quad a = \sqrt{g},$$

при условиях

$$u|_{x=l} = 0, \quad u|_{t=0} = f(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = F(x).$$

Глава XV

МАЛЫЕ РАДИАЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ГАЗА

§ 1. Радиальные колебания газа в сфере

Предположим, что газ заключен в твердую непроницаемую оболочку сферической формы; поставим задачу исследовать малые колебания газа около его положения равновесия.

В гл. I было показано, что потенциал скоростей газа удовлетворяет волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right). \tag{1}$$