Заметим еще, что из сравнения формул (34) и (40) вытекает следующее разложение функции $\frac{J_0(tx)}{J_0(t)}$ на рациональные дроби:

$$\frac{J_0(tx)}{J_0(t)} = 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^2}{\mu_k^2 - t^2} \cdot \frac{J_0(\mu_k x)}{\mu_k J_1(\mu_k)}, \tag{41}$$

где суммирование распространяется по всем положительным корням уравнения $J_0(x) = 0$.

ЗАДАЧА

Тяжелая однородная нить длиной l, закрепленная верхним концом ($x = l$) на вертикальной оси, вращается вокруг этой оси с постоянной угловой скоростью ω. Вывести уравнения малых колебаний нити и доказать, что ее отклонение от положения равновесия выражается формулой

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos a\lambda_k t + B_k \sin a\lambda_k t) J_0\left(\mu_k \sqrt{\frac{x}{l}}\right),$$

где

$$A_k = \frac{1}{lJ_1^2(\mu_k)} \int_0^l f(x) J_0\left(\mu_k \sqrt{\frac{x}{l}}\right) dx,$$

$$B_k = \frac{1}{a\lambda_k l J_1^2(\mu_k)} \int_0^l F(x) J_0\left(\mu_k \sqrt{\frac{x}{l}}\right) dx, \qquad \lambda_k = \sqrt{\frac{\mu_k^2}{4l} - \left(\frac{\omega}{a}\right)^2},$$

а $\mu_1, \mu_2, \ldots$ — положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$.

Указание. Задача приводится к решению уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial}{\partial x}\left(x \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \omega^2 u, \qquad \text{где} \quad a = \sqrt{g},$$

при условиях

$$u|_{x=l} = 0, \quad u|_{t=0} = f(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = F(x).$$

Глава XV

МАЛЫЕ РАДИАЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ГАЗА

§ 1. Радиальные колебания газа в сфере

Предположим, что газ заключен в твердую непроницаемую оболочку сферической формы; поставим задачу исследовать малые колебания газа около его положения равновесия.

В гл. I было показано, что потенциал скоростей газа удовлетворяет волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right). \tag{1}$$

В этом параграфе рассмотрим так называемые *радиальные* колебания газа, которые образуются в том случае, когда начальные условия выражаются равенствами

$$u\big|_{t=0}=f(r),\qquad \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0}=F(r),\tag{2}$$

где r — расстояние от колеблющейся частицы газа до центра шара.

Так как поверхность шара представляет собой твердую неподвижную оболочку, то нормальная составляющая скорости равна нулю, что приводит к граничному условию

$$\frac{\partial u}{\partial r}\bigg|_{r=R}=0,\tag{3}$$

где R — радиус сферической оболочки.

Поскольку в случае радиальных колебаний потенциал скоростей u зависит только от r и t, то, воспользовавшись выражением для оператора Лапласа в сферических координатах (гл. XVIII, § 7), уравнение (1) можно написать в таком виде:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.\tag{4}$$

Таким образом, задача сводится к решению уравнения (4) при начальных условиях (2) и граничном условии (3). Будем искать частные решения уравнения (4) в виде

$$u=T(t)\,w(r).\tag{5}$$

Подставив это в (4), получим

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)}=\frac{w''(r)+\frac{2}{r}w'(r)}{w(r)}.$$

Обозначив обе части этого равенства через λ^2, получим два уравнения:

$$T''(t)+\lambda^2a^2T(t)=0,\tag{6}$$

$$w''(r)+\frac{2}{r}w'(r)+\lambda^2 w(r)=0.\tag{7}$$

Чтобы функция (5), отличная от тождественного нуля, удовлетворяла граничному условию (3), очевидно, нужно потребовать выполнения условия

$$\frac{dw}{dr}\bigg|_{r=R}=0.\tag{8}$$

Общее решение уравнения (7) имеет вид

$$w(r)=C_1\frac{\sin\lambda r}{r}+C_2\frac{\cos\lambda r}{r},\tag{9}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Так как по самому смыслу задачи искомое решение $u(r, t)$ должно оставаться ограниченным во всех точках внутри сферы, в том числе и в центре, т. е. при $r=0$, то в решении (9) мы должны положить $C_2=0$. Не ограничивая общности, можно считать $C_1=1$. Таким образом,

$$w(r)=\frac{\sin\lambda r}{r}. \tag{10}$$

Подставив (10) в граничное условие (8), получим уравнение

$$\lambda R\cos\lambda R-\sin\lambda R=0 \tag{11}$$

для определения собственных чисел уравнения (7) при граничном условии (8) и $w(0)<\infty$. Если положить

$$\lambda R=\mu, \tag{12}$$

то уравнение (11) можно записать в виде

$$\operatorname{tg}\mu=\mu. \tag{13}$$

Для нахождения вещественных корней этого уравнения построим графики функций

$$y=\operatorname{tg}\mu, \quad y=\mu.$$

Очевидно, что абсциссы точек пересечения этих кривых и дадут искомые корни (рис. 23). Из чертежа видно, что корни μ_k урав-

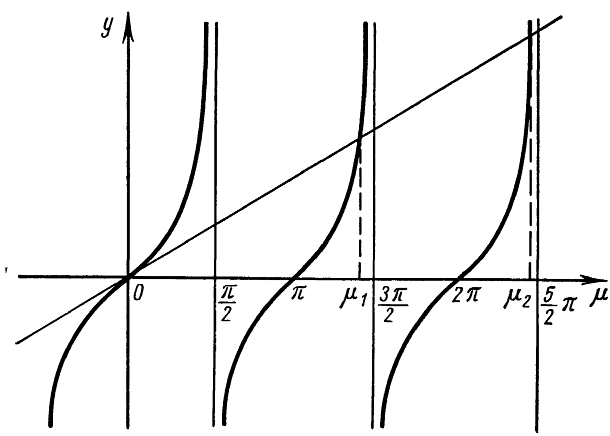

Рис. 23

нения (13) с увеличением индекса k неограниченно возрастают по абсолютной величине, причем разность $\mu_k-\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi$ стремится к нулю. Отсюда следует, что при достаточно большом k

можно положить

$$\mu_k=\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi. \tag{14}$$

Что касается первых корней, то их можно вычислить следующим способом. Положим

$$\mu_k=\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi-\varepsilon_k. \tag{15}$$

Подставив в уравнение (13), получим

$$\operatorname{ctg}\varepsilon_k=\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi-\varepsilon_k. \tag{16}$$

Возьмем теперь в разложении

$$\operatorname{ctg}\varepsilon_k=\frac{1}{\varepsilon_k}-\frac{1}{3}\varepsilon_k-\frac{1}{45}\varepsilon_k^2+\ldots$$

два первых члена; тогда уравнение (16) запишется в виде

$$\varepsilon_k=\frac{2}{(2k+1)\pi}+\frac{4\varepsilon_k^2}{3(2k+1)\pi}. \tag{17}$$

Применив к последнему уравнению метод итерации, найдем приближенное значение ε_k, а следовательно, по формуле (15), приближенное значение корней μ_k $(k=1,\ 2,\ \ldots)$.

Так, например, с точностью до четвертого знака

$$\mu_1=4{,}4935,\quad \mu_2=7{,}7250,\quad \mu_3=10{,}9044.$$

Обозначим через $\mu_1,\ \mu_2,\ \mu_3,\ \ldots$ положительные корни уравнения (13). Тогда, согласно (12), собственные числа будут

$$\lambda_k^2=\left(\frac{\mu_k}{R}\right)^2\qquad (k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots). \tag{18}$$

Каждому собственному числу λ_k^2 соответствует собственная функция

$$w_k(r)=\frac{\sin\frac{\mu_k r}{R}}{r}. \tag{19}$$

Отметим, что $\lambda_0=0$ — также собственное число задачи (7), (8), которому соответствует собственная функция $w_0(r)=\mathrm{const}$.

При $\lambda=\lambda_k$ общее решение уравнения (6) имеет вид

$$T_k(t)=a_k\cos\frac{\mu_k at}{R}+b_k\sin\frac{\mu_k at}{R},$$

где a_k и b_k — произвольные постоянные.

При $\lambda_0=0$ имеем

$$T_0(t)=a_0+b_0t.$$

В силу (5) получим, что функции

$$u_k(r,\ t)=\left(a_k\cos\frac{\mu_k at}{R}+b_k\sin\frac{\mu_k at}{R}\right)\frac{\sin\frac{\mu_k r}{R}}{r},$$
$$u_0(r,\ t)=a_0+b_0 t$$

удовлетворяют уравнению (4) и граничному условию (3) при любых a_0, b_0, a_k, b_k.

Далее, составим ряд

$$u(r,\ t)=a_0+b_0t+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{\mu_k at}{R}+b_k\sin\frac{\mu_k at}{R}\right)\frac{\sin\frac{\mu_k r}{R}}{r}. \tag{20}$$

Для выполнения начальных условий (2) необходимо, чтобы

$$f(r)=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\frac{\sin\frac{\mu_k r}{R}}{r}, \tag{21}$$

$$F(r)=b_0+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mu_k a}{R}b_k\frac{\sin\frac{\mu_k r}{R}}{r}. \tag{22}$$

Предполагая, что ряд (21) сходится равномерно, мы можем определить коэффициенты a_k, умножив обе части равенства (21) на $r\sin\frac{\mu_n r}{R}$ и проинтегрировав по r в интервале от 0 до R; тогда получим

$$\int_0^R rf(r)\sin\frac{\mu_n r}{R}\,dr=a_0\int_0^R r\sin\frac{\mu_n r}{R}\,dr+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\int_0^R\sin\frac{\mu_k r}{R}\sin\frac{\mu_n r}{R}\,dr. \tag{23}$$

Докажем, что

$$\int_0^R r\sin\frac{\mu_n r}{R}\,dr=0. \tag{24}$$

В самом деле, интегрируя по частям, получим

$$\int_0^R r\sin\frac{\mu_n r}{R}\,dr=-\frac{R^2}{\mu_n^2}(\mu_n\cos\mu_n-\sin\mu_n)=\frac{R^2\cos\mu_n}{\mu_n^2}(\operatorname{tg}\mu_n-\mu_n),$$

откуда, в силу уравнения (13), и следует равенство (24). Далее, из формулы

$$\int_0^R\sin\frac{\mu_n r}{R}\sin\frac{\mu_k r}{R}\,dr=\frac{R}{2}\left[\frac{\sin(\mu_n-\mu_k)}{\mu_n-\mu_k}-\frac{\sin(\mu_n+\mu_k)}{\mu_n+\mu_k}\right]$$

следует, что

$$\int_0^R \sin\frac{\mu_n r}{R}\sin\frac{\mu_k r}{R}\,dr = \frac{R}{2}\,\frac{\cos\mu_k\sin\mu_n\,(\mu_k \operatorname{tg}\mu_n - \mu_n \operatorname{tg}\mu_k)}{\mu_n^2-\mu_k^2},$$

но так как μ_k и μ_n суть корни уравнения (13), то

$$\int_0^R \sin\frac{\mu_n r}{R}\sin\frac{\mu_k r}{R}\,dr = 0 \qquad (k \neq n), \tag{25}$$

т. е. функции $\sin\frac{\mu_k r}{R}$ ортогональны в интервале $(0,\ R)$. Если же $n=k$, то

$$\int_0^R \sin^2\frac{\mu_k r}{R}\,dr = \frac{R}{2}\left(1-\frac{\sin^2\mu_k}{\mu_k^2}\right),$$

а так как

$$\sin^2\mu_k = \frac{\operatorname{tg}^2\mu_k}{1+\operatorname{tg}^2\mu_k} = \frac{\mu_k^2}{1+\mu_k^2},$$

то

$$\int_0^R \sin^2\frac{\mu_k r}{R}\,dr = \frac{R}{2}\,\frac{\mu_k^2}{1+\mu_k^2}. \tag{26}$$

Приняв во внимание (24), (25) и (26), из равенства (23) найдем, что

$$a_k = \frac{2}{R}\left(1+\frac{1}{\mu_k^2}\right)\int_0^R r f(r)\sin\frac{\mu_k r}{R}\,dr. \tag{27}$$

Чтобы определить коэффициент a_0, умножим обе части равенства (21) на r^2 и проинтегрируем по r в интервале от 0 до R, тогда получим

$$\int_0^R r^2 f(r)\,dr = \frac{R^3}{3}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_0^R r\sin\frac{\mu_k r}{R}\,dr.$$

Интеграл, стоящий здесь под знаком суммы, равен нулю, что следует из (24). Следовательно,

$$a_0 = \frac{3}{R^3}\int_0^R r^2 f(r)\,dr. \tag{28}$$

Аналогично найдем

$$b_k = \frac{2}{a\mu_k}\left(1+\frac{1}{\mu_k^2}\right)\int_0^R rF(r)\sin\frac{\mu_k r}{R}\,dr, \tag{29}$$

$$b_0 = \frac{3}{R^3}\int_0^R r^2F(r)\,dr. \tag{30}$$

Таким образом, все постоянные, входящие в решение (20), найдены. Заметим теперь, что в этом решении член

$$a_0 + b_0 t \tag{31}$$

может быть отброшен. В самом деле, для определения процесса движения газа нам надо прежде всего определить скорость **v**, с которой колеблются его частицы. Составляющие v_x, v_y, v_z этой скорости на координатные оси вычисляются на основании формул

$$v_x = -\frac{\partial u}{\partial x}, \quad v_y = -\frac{\partial u}{\partial y}, \quad v_z = -\frac{\partial u}{\partial z},$$

где потенциал u выражается рядом (20). Но слагаемое (31), входящее в этот ряд, не зависит от x, y и z; поэтому картина распределения скоростей в колеблющемся газе не изменится, если в ряде (20) отбросить член (31).

Положим теперь

$$a_k = A_k\sin\varphi_k, \quad b_k = A_k\cos\varphi_k,$$

тогда выражение (20) для потенциала скоростей может быть переписано следующим образом:

$$u(r,\ t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k\frac{\sin\frac{\mu_k r}{R}}{r}\sin\left(\frac{a\mu_k t}{R}+\varphi_k\right). \tag{32}$$

Эта формула показывает, что общее радиальное колебание газа можно рассматривать как состоящее из бесчисленного множества собственных г а р м о н и ч е с к и х колебаний, совершающихся с периодом

$$T_k = \frac{2\pi R}{\mu_k}\sqrt{\frac{\rho_0}{\gamma p_0}}.$$

Первый член ряда (32) дает о с н о в н о й т о н радиальных колебаний газа, его период определяется формулой

$$T_1 = \frac{2\pi R}{\mu_1}\sqrt{\frac{\rho_0}{\gamma p_0}},$$

где μ_1 — наименьший положительный корень уравнения (13).