§ 2. Радиальные колебания газа в неограниченной цилиндрической трубке

Предположим, что имеется неподвижная трубка, настолько длинная, что ее можно считать простирающейся в обе стороны до бесконечности; обозначим радиус поперечного сечения такой трубки через R.

Допустим, что эта трубка заполнена газом, который совершает малые колебания около своего положения равновесия. Поставим себе задачей исследовать эти малые колебания, причем ограничимся радиальными колебаниями, при которых потенциал скоростей u зависит только от r — расстояния колеблющейся частицы газа до оси цилиндра Oz и от времени t.

В этом случае волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

написанное в цилиндрических координатах r, φ и z, примет более простой вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \tag{33}$$

Очевидно, что мы решим поставленную задачу о малых колебаниях газа, если найдем такое решение уравнения (33), которое удовлетворяет начальным условиям

$$u\,|_{t=0}=f(r), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=F(r) \tag{34}$$

и граничному условию

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=R}=0. \tag{35}$$

Согласно методу Фурье, частные решения уравнения (33) ищем в виде

$$u(r,\ t)=T(t)\,w(r). \tag{36}$$

Подставив в (33), получим

$$\frac{w''(r)+\frac{1}{r}w'(r)}{w(r)}=\frac{T''(t)}{a^2T(t)}=-\lambda^2$$

и, следовательно,

$$T''(t)+a^2\lambda^2T(t)=0, \tag{37}$$

$$w''(r)+\frac{1}{r}w'(r)+\lambda^2 w(r)=0. \tag{38}$$

Чтобы функция (36), отличная от тождественного нуля удовлетворяла граничному условию (35), очевидно, нужно потребовать выполнения условия

$$\left.\frac{dw}{dr}\right|_{r=R}=0. \tag{39}$$

Общее решение уравнения (38) имеет вид (см. гл. XIII, § 1)

$$w(r)=C_1J_0(\lambda r)+C_2Y_0(\lambda r), \tag{40}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Второе решение $Y_0(\lambda r)$ уравнения Бесселя обращается в бесконечность при $r=0$. Так как по самому смыслу задачи искомое решение должно оставаться ограниченным во всех точках цилиндра, в том числе и на оси его, т. е. при $r=0$, то в формуле (40) следует положить $C_2=0$. Не ограничивая общности, можно считать $C_1=1$, т. е. положить

$$w(r)=J_0(\lambda r)$$

и тогда граничное условие (39) дает

$$J_0'(\lambda R)=0 \tag{41}$$

или, пользуясь равенством $J_0'(x)=-J_1(x)$, уравнение (41) можно заменить следующим:

$$J_1(\lambda R)=0. \tag{42}$$

Это уравнение определяет собственные числа уравнения (38) при граничном условии (39) и $w(0)<\infty$.

В гл. XIII было показано, что уравнение

$$J_1(\mu)=0 \tag{43}$$

имеет бесчисленное множество положительных корней: μ_1, μ_2, μ_3, ... Отсюда следует, что собственные числа задачи определяются по формуле

$$\lambda_k^2=\left(\frac{\mu_k}{R}\right)^2. \tag{44}$$

Каждому собственному числу λ_k^2 соответствует собственная функция

$$w_k(r)=J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right). \tag{45}$$

Отметим, что $\lambda^2=0$ также является собственным числом задачи (38), (39), которому соответствует собственная функция $w_0(r)=\text{const}$.

При $\lambda=\lambda_k$ общее решение уравнения (37) имеет вид

$$T_k(t)=a_k\cos\frac{\mu_k at}{R}+b_k\sin\frac{\mu_k at}{R},$$

где a_k и b_k — произвольные постоянные.

При $\lambda=0$ имеем

$$T_0(t)=a_0+b_0t.$$

В силу (36) получим, что функции

$$u_0=a_0+b_0t,$$

$$u_k(r,\ t)=\left(a_k\cos\frac{\mu_k at}{R}+b_k\sin\frac{\mu_k at}{R}\right)J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right)$$

удовлетворяют уравнению (33) и граничному условию (35) при любых a_0, b_0, a_k и b_k. Далее, решение задачи ищем в виде

$$u(r,\ t)=a_0+b_0t+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{\mu_k at}{R}+b_k\sin\frac{\mu_k at}{R}\right)J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right). \qquad (46)$$

Для выполнения начальных условий (34) необходимо, чтобы

$$f(r)=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}a_kJ_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right), \qquad (47)$$

$$F(r)=b_0+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mu_k a}{R}\,b_kJ_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right). \qquad (48)$$

Написанные ряды представляют собой разложение заданных функций $f(r)$ и $F(r)$ по функциям Бесселя $J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right)$ в интервале $(0,\ R)$, где μ_k — положительные корни уравнения (43). Но такого рода разложения нами изучались в конце гл. XIII, причем здесь мы имеем тот случай, когда $\alpha=\nu=0$. Применив к рассматриваемому случаю формулы (45), (46) и (50) гл. XIII, найдем значение коэффициентов a_0, b_0, a_k и b_k, а именно:

$$a_0=\frac{2}{R^2}\int_0^R rf(r)\,dr,\quad a_k=\frac{2}{R^2J_0^2(\mu_k)}\int_0^R rf(r)\,J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right)dr, \qquad (49)$$

$$b_0=\frac{2}{R^2}\int_0^R rF(r)\,dr,\quad b_k=\frac{2}{aR\mu_kJ_0^2(\mu_k)}\int_0^R rF(r)\,J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right)dr \qquad (50)$$

Таким образом, все постоянные, входящие в решение (46), найдены.

Принимая теперь во внимание, что u есть потенциал скоростей, можем отбросить слагаемое a_0+b_0t, так как от этого картина распределения скоростей в колеблющемся газе не изменится. Внося затем вместо коэффициентов a_k и b_k новые постоянные A_k и φ_k посредством равенств

$$a_k=A_k\sin\varphi_k,\quad b_k=A_k\cos\varphi_k,$$

перепишем ряд (46) в виде

$$u(r,\ t)=\sum_{k=1}^{\infty}A_kJ_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right)\sin\left(\frac{\mu_k at}{R}+\varphi_k\right), \qquad (51)$$

откуда ясно, что радиальные колебания газа носят гармонический характер, причем период основного тона определяется формулой

$$T_1 = \frac{2\pi R}{\mu_1} \sqrt{\frac{\rho_0}{\gamma p_0}},$$

где $\mu_1 = 3{,}83171$ — наименьший корень уравнения (43).

ЗАДАЧИ

1. Идеальный газ заключен между двумя неподвижными концентрическими сферами радиусов R_1 и R_2 ($R_1 < R_2$). Найти малые колебания газа между сферами, вызванные начальным радиальным возмущением плотности

$$\rho(r,\ 0) - \rho_0 = f(r) \qquad (R_1 < r < R_2).$$

Ответ:

$$u(r,\ t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{\cos \lambda_n r + \gamma_n \sin \lambda_n r}{r} \sin a\lambda_n t,$$

где

$$\gamma_n = \frac{\lambda_n R_2 \sin \lambda_n R_2 + \cos \lambda_n R_2}{\lambda_n R_2 \cos \lambda_n R_2 - \sin \lambda_n R_2},$$

а $\lambda_1,\ \lambda_2, \ldots$ — положительные корни уравнения

$$\operatorname{tg} \lambda (R_2 - R_1) = \frac{\lambda (R_2 - R_1)}{1 + \lambda^2 R_1 R_2},$$

$$A_n = \frac{a}{\rho_0 \lambda_n \delta_n^2} \int_{R_1}^{R_2} r f(r) (\cos \lambda_n r + \gamma_n \sin \lambda_n r)\, dr,$$

$$\delta_n^2 = \int_{R_1}^{R_2} (\cos \lambda_n r + \gamma_n \sin \lambda_n r)^2\, dr.$$

Указание. Задача сводится к решению уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right)$$

при условиях

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=R_1} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=R_2} = 0,$$

$$u(r,\ 0) = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \frac{a^2}{\rho_0} f(r) \quad (R_1 < r < R_2).$$

2. Идеальный газ заключен между двумя концентрическими сферами s_{R_1} и s_{R_2}. Радиус внутренней сферы s_{R_1} меняется по закону

$$R(t) = R_1 + \varepsilon \sin \omega t \quad (0 < \varepsilon < R_1),$$

а внешняя сфера остается неподвижной. Найти установившиеся колебания газа между сферами.

Ответ:

$$u(r, t)=\left\{\frac{R_1R_2\omega\cos\frac{\omega R_2}{a}-aR_1\sin\frac{\omega R_2}{a}}{(R_2-R_1)\cos\frac{\omega(R_2-R_1)}{a}}\cdot\frac{\cos\frac{\omega r}{a}}{r}+\right.$$

$$\left.+\frac{\omega R_1R_2\sin\frac{\omega R_2}{a}+aR_1\cos\frac{\omega R_2}{a}}{(R_2-R_1)\cos\frac{\omega(R_2-R_1)}{a}}\cdot\frac{\sin\frac{\omega r}{a}}{r}\right\}\cdot 2\varepsilon\cos\omega t.$$

Указание. Задача сводится к решению уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

при граничных условиях

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=R_1}=\varepsilon\omega\cos\omega t,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=R}=0.$$

3. Однородный газ заполняет бесконечно длинную полую трубку, внутренний радиус которой равен R_1, а наружный — R_2. Найти малые колебания газа, если начальные возмущения радиально симметричны.

Ответ:

$$u(r, t)=\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos a\lambda_k t+b_k\sin a\lambda_k t)\,R_k(r),$$

где

$$R_k(r)=J_0(\lambda_k r)\,H_0^{(1)\prime}(\lambda_k R_2)-J_0'(\lambda_k R_2)\,H_0^{(1)}(\lambda_k r),$$

λ_k — положительные корни уравнения

$$J_1(\lambda_k R_1)\,H_0^{(1)\prime}(\lambda_k R_2)-J_0(\lambda_k R_2)\,H_0^{(1)\prime}(\lambda_k R_1)=0,$$

$$a_k=\frac{1}{N_k}\int_{R_1}^{R_2} rf(r)\,R_k(r)\,dr,\qquad b_k=\frac{1}{a\lambda_k N_k}\int_{R_1}^{R_2} rF(r)\,R_k(r)\,dr,$$

$$N_k=\int_{R_1}^{R_2} rR_k^2(r)\,dr.$$

Глава XVI

ПОЛИНОМЫ ЛЕЖАНДРА

§ 1. Дифференциальное уравнение Лежандра

Уравнением Лежандра называется уравнение вида

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dy}{dx}\right]+\lambda y=0, \tag{1}$$

где λ — некоторый параметр; оно имеет особые точки $x=-1$ и $x=+1$.