Ответ:

$$u(r,t)=\left\{\frac{R_1R_2\omega\cos\frac{\omega R_2}{a}-aR_1\sin\frac{\omega R_2}{a}}{(R_2-R_1)\cos\frac{\omega(R_2-R_1)}{a}}\cdot\frac{\cos\frac{\omega r}{a}}{r}+\right.$$

$$\left.+\frac{\omega R_1R_2\sin\frac{\omega R_2}{a}+aR_1\cos\frac{\omega R_2}{a}}{(R_2-R_1)\cos\frac{\omega(R_2-R_1)}{a}}\cdot\frac{\sin\frac{\omega r}{a}}{r}\right\}\cdot 2\varepsilon\cos\omega t.$$

Указание. Задача сводится к решению уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

при граничных условиях

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=R_1}=\varepsilon\omega\cos\omega t,\qquad \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=R}=0.$$

3. Однородный газ заполняет бесконечно длинную полую трубку, внутренний радиус которой равен R_1, а наружный — R_2. Найти малые колебания газа, если начальные возмущения радиально симметричны.

Ответ:

$$u(r,\ t)=\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos a\lambda_k t+b_k\sin a\lambda_k t)\,R_k(r),$$

где

$$R_k(r)=J_0(\lambda_k r)\,H_0^{(1)\prime}(\lambda_k R_2)-J_0'(\lambda_k R_2)\,H_0^{(1)}(\lambda_k r),$$

λ_k — положительные корни уравнения

$$J_1(\lambda_k R_1)\,H_0^{(1)\prime}(\lambda_k R_2)-J_0(\lambda_k R_2)\,H_0^{(1)\prime}(\lambda_k R_1)=0,$$

$$a_k=\frac{1}{N_k}\int_{R_1}^{R_2} rf(r)\,R_k(r)\,dr,\qquad b_k=\frac{1}{a\lambda_k N_k}\int_{R_1}^{R_2} rF(r)\,R_k(r)\,dr,$$

$$N_k=\int_{R_1}^{R_2} rR_k^2(r)\,dr.$$

Глава XVI

ПОЛИНОМЫ ЛЕЖАНДРА

§ 1. Дифференциальное уравнение Лежандра

Уравнением Лежандра называется уравнение вида

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dy}{dx}\right]+\lambda y=0,\tag{1}$$

где λ — некоторый параметр; оно имеет особые точки $x=-1$ и $x=+1$.

7*

Рассмотрим следующую граничную задачу: *найти значения параметра* λ, *при которых в промежутке* $[-1, 1]$ *существует нетривиальное решение уравнения* (1), *ограниченное в особых точках* $x = \pm 1$.

Будем искать решение уравнения Лежандра в виде степенного ряда

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \tag{2}$$

Подставляя (2) в (1), получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n-1)a_n - 2na_n + \lambda a_n] x^n = 0.$$

Отсюда следует, что

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} - [n(n+1) - \lambda] a_n = 0$$

или

$$a_{n+2} = \frac{n(n+1) - \lambda}{(n+1)(n+2)} a_n. \tag{3}$$

Коэффициенты a_0 и a_1 остаются произвольными. При $a_0 \neq 0$, $a_1 = 0$ получим частное решение уравнения (1), содержащее только четные степени x, при $a_0 = 0$, $a_1 \neq 0$ — частное решение, содержащее только нечетные степени x.

При $\lambda = n(n+1)$ уравнение (1) имеет решение в виде многочлена степени n, которое ограничено в особых точках $x = \pm 1$. Найдем теперь соответствующие решения уравнения

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dy}{dx}\right] + n(n+1)y = 0, \tag{4}$$

имеющие форму многочленов степени n.

Рассмотрим многочлен степени $2n$:

$$z = (x^2 - 1)^n.$$

Нетрудно видеть, что этот многочлен удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению

$$(x^2 - 1)\frac{dz}{dx} - 2nxz = 0.$$

Продифференцируем обе части этого уравнения n раз по x, тогда получим

$$(1 - x^2)\frac{dz^{(n)}}{dx} + n(n+1)z^{(n-1)} = 0.$$

Если мы продифференцируем это уравнение еще раз по x, то найдем, что $z^{(n)}$ удовлетворяет уравнению (4).

Итак, уравнение (4) имеет решение

$$y = Cz^{(n)} = C\frac{d^n (x^2-1)^n}{dx^n},$$

где C — постоянная. Полагая

$$C = \frac{1}{2^n n!},$$

получим

$$y = P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\cdot\frac{d^n (x^2-1)^n}{dx^n} \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \tag{5}$$

Это и есть *полиномы Лежандра*, которые являются решениями уравнения (1) при $\lambda = n(n+1)$.

Формула (5) называется *формулой Родрига*.

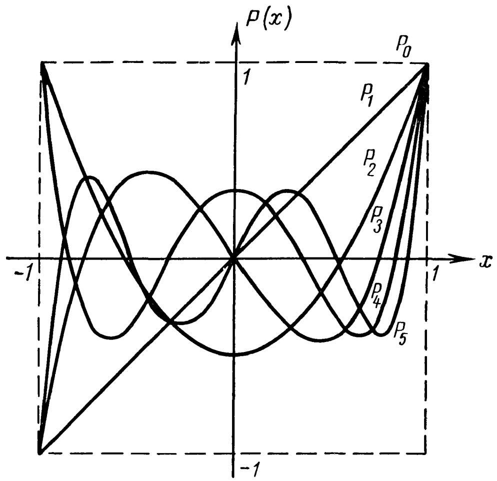

Рис. 24

Таким образом, полиномы Лежандра являются собственными функциями рассматриваемой задачи, соответствующими собственным числам

$$\lambda_n = n(n+1) \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Вычисляя по формуле (5), получим:

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1), \; P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3-3x),$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3), \; P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$$

и т. д.

Графики полиномов Лежандра первых шести порядков изображены на рис. 24.