§ 2. Ортогональность полиномов Лежандра и их норма

Докажем, что полиномы Лежандра различных порядков ортогональны в интервале $(-1, +1)$. Напишем уравнение (1) для двух различных полиномов Лежандра.

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)P'_m(x)\right]+\lambda_m P_m(x)=0,\\&\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)P'_n(x)\right]+\lambda_n P_n(x)=0.\end{aligned}\right.\qquad (m\neq n).$$

Умножая первое из этих уравнений на $P_n(x)$, второе — на $P_m(x)$, вычитая и интегрируя по промежутку $(-1, 1)$, получим

$$(\lambda_m-\lambda_n)\int_{-1}^{1}P_n(x)P_m(x)\,dx=$$

$$=\int_{-1}^{1}\left\{P_m(x)\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)P'_n(x)\right]-P_n(x)\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)P'_m(x)\right]\right\}dx=$$

$$=\int_{-1}^{1}\frac{d}{dx}\left\{(1-x^2)\left[P_m(x)P'_n(x)-P_n(x)P'_m(x)\right]\right\}dx=$$

$$=(1-x^2)\left[P_m(x)P'_n(x)-P_n(x)P'_m(x)\right]\Big|_{x=-1}^{x=+1}=0.$$

Итак,

$$(\lambda_m-\lambda_n)\int_{-1}^{1}P_n(x)P_m(x)\,dx=0$$

или

$$\int_{-1}^{1}P_n(x)P_m(x)\,dx=0\quad(m\neq n),$$

т. е. полиномы Лежандра ортогональны в интервале $(-1, +1)$.

Вычислим квадрат нормы полиномов Лежандра

$$J_n=\int_{-1}^{1}P_n^2(x)\,dx.$$

Пользуясь формулой (5), перепишем интеграл в виде

$$J_n=\frac{1}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1}\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}\cdot\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}\,dx.$$

Интегрируя n раз по частям и принимая во внимание, что каждый раз внеинтегральный член равен нулю, получим

$$\int_{-1}^{1}P_n^2(x)\,dx=\frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n\frac{d^{2n}(x^2-1)^n}{dx^{2n}}\,dx$$

или

$$\int_{-1}^{1} P_n^2(x)\,dx = \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \int_{-1}^{1} (x^2-1)^n\,dx.$$

Известно, что

$$\int_{-1}^{1} (x^2-1)^n\,dx = (-1)^n\, 2 \cdot \frac{2\cdot 4 \ldots 2n}{3\cdot 5 \ldots (2n+1)},$$

и предыдущая формула окончательно дает:

$$\int_{-1}^{1} P_n^2(x)\,dx = \frac{2}{2n+1}.$$

Таким образом, мы имеем

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)\,P_m(x)\,dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \dfrac{2}{2n+1}, & m = n. \end{cases} \qquad (6)$$

Пусть произвольная функция $f(x)$ представима в виде ряда по полиномам Лежандра

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x). \qquad (7)$$

Коэффициенты a_n этого разложения могут быть формально определены на основании свойства ортогональности полиномов Лежандра. Действительно, умножая ряд (7) на $P_m(x)$ и интегрируя по отрезку $[-1,\ +1]$, получим, в силу (6), что

$$a_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x)\,P_n(x)\,dx. \qquad (8)$$

Докажем теперь, что система ортогональных полиномов Лежандра (5) в интервале $(-1,\ +1)$ является *замкнутой системой*. Действительно, в систему (5) входят многочлены всех степеней. Поэтому любой многочлен $Q_n(x)$ степени n можно представить в виде линейной комбинации полиномов Лежандра порядков от нуля до n:

$$Q_n(x) = \sum_{k=0}^{n} C_k P_k(x).$$

С другой стороны, в силу теоремы Вейерштрасса, любую непрерывную функцию в отрезке $[-1,\ 1]$ можно равномерно приблизить многочленом $Q_n(x)$ со сколь угодно большой точностью.

Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такую линейную комбинацию полиномов Лежандра, чтобы было

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} C_k P_k(x) \right| < \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2},$$

из чего непосредственно следует

$$\int_{-1}^{1} \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n} C_k P_k(x) \right]^2 dx < \varepsilon.$$

Если вместо коэффициентов C_k мы возьмем коэффициенты Фурье функции $f(x)$ относительно системы полиномов Лежандра (5), то написанное неравенство будет тем более удовлетворено. В силу произвольной малости числа $\varepsilon > 0$, мы можем утверждать, что средняя квадратичная погрешность при представлении функции отрезком ее ряда Фурье по полиномам Лежандра стремится к нулю, т. е. полиномы Лежандра действительно образуют *замкнутую систему*, а значит, и *полную систему*. Отсюда легко заключаем, что уравнение (1) не имеет решений ограниченных в особых точках $x = \pm 1$, отличных от полиномов Лежандра. Действительно, если бы такое решение существовало, то оно было бы ортогонально ко всем полиномам Лежандра $P_n(x)$, что невозможно, так как система $\{P_n(x)\}$ полная.

§ 3. Некоторые свойства полиномов Лежандра

1) Полином Лежандра n-й степени есть функция той же четности, что и n:

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x). \tag{9}$$

Это утверждение непосредственно следует из формулы (5), если заметить, что $(x^2 - 1)^n$ функция четная, а каждое дифференцирование меняет ее четность.

2) $$P_{2n-1}(0) = 0, \quad P_{2n}(0) = (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}. \tag{10}$$

Первое из этих равенств сразу следует из (9). При доказательстве второго заметим, что значение многочлена при $x = 0$ есть его свободный член. Так как при n-кратном дифференцировании степень каждого члена понижается на n единиц, то свободный член $P_{2n}(0)$ получается при дифференцировании члена, содержащего x^{2n}, многочлена $(x^2 - 1)^{2n}$. Этот член, очевидно, равен $(-1)^n \frac{(2n)!}{(n!)^2} x^{2n}$. Дифференцируя его $2n$ раз и умножая на $\frac{1}{2^{2n}(2n)!}$, мы и получим вторую из формул (10).

3) $$P_n(1) = 1, \quad P_n(-1) = (-1)^n. \tag{11}$$