Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такую линейную комбинацию полиномов Лежандра, чтобы было

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} C_k P_k(x) \right| < \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2},$$

из чего непосредственно следует

$$\int_{-1}^{1} \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n} C_k P_k(x) \right]^2 dx < \varepsilon.$$

Если вместо коэффициентов C_k мы возьмем коэффициенты Фурье функции $f(x)$ относительно системы полиномов Лежандра (5), то написанное неравенство будет тем более удовлетворено. В силу произвольной малости числа $\varepsilon > 0$, мы можем утверждать, что средняя квадратичная погрешность при представлении функции отрезком ее ряда Фурье по полиномам Лежандра стремится к нулю, т. е. полиномы Лежандра действительно образуют *замкнутую систему*, а значит, и *полную систему*. Отсюда легко заключаем, что уравнение (1) не имеет решений ограниченных в особых точках $x = \pm 1$, отличных от полиномов Лежандра. Действительно, если бы такое решение существовало, то оно было бы ортогонально ко всем полиномам Лежандра $P_n(x)$, что невозможно, так как система $\{P_n(x)\}$ полная.

§ 3. Некоторые свойства полиномов Лежандра

1) Полином Лежандра n-й степени есть функция той же четности, что и n:

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x). \tag{9}$$

Это утверждение непосредственно следует из формулы (5), если заметить, что $(x^2-1)^n$ функция четная, а каждое дифференцирование меняет ее четность.

2) $$P_{2n-1}(0) = 0, \quad P_{2n}(0) = (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}. \tag{10}$$

Первое из этих равенств сразу следует из (9). При доказательстве второго заметим, что значение многочлена при $x = 0$ есть его свободный член. Так как при n-кратном дифференцировании степень каждого члена понижается на n единиц, то свободный член $P_{2n}(0)$ получается при дифференцировании члена, содержащего x^{2n}, многочлена $(x^2-1)^{2n}$. Этот член, очевидно, равен $(-1)^n \frac{(2n)!}{(n!)^2} x^{2n}$. Дифференцируя его $2n$ раз и умножая на $\frac{1}{2^{2n}(2n)!}$, мы и получим вторую из формул (10).

3) $$P_n(1) = 1, \quad P_n(-1) = (-1)^n. \tag{11}$$

Для доказательства перепишем формулу (5) следующим образом:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x+1)^n (x-1)^n]$$

и, применяя формулу Лейбница, получим

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \left[(x+1)^n \frac{d^n (x-1)^n}{dx^n} + \right.$$
$$\left. + n \frac{d(x+1)^n}{dx} \frac{d^{n-1}(x-1)^n}{dx^{n-1}} + \ldots \right].$$

Имеем, очевидно,

$$\frac{d^n (x-1)^n}{dx^n} = n! \quad \text{и} \quad \left. \frac{d^{n-k}(x-1)^n}{dx^{n-k}} \right|_{x=1} = 0 \quad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

откуда непосредственно следует равенство

$$P_n(1) = 1.$$

Второе из равенств (11) получается из первого при помощи (9).

4) Все корни полинома Лежандра $P_n(x)$ вещественны, различны и лежат в интервале $(-1,\ +1)$.

Это утверждение легко следует из формулы (5) и теоремы Ролля. Действительно, многочлен $\frac{d(x^2-1)^n}{dx}$ степени $2n-1$ имеет корни $x = \pm 1$ кратности $n-1$ и по теореме Ролля имеет еще один корень $x = \xi_1$ внутри отрезка $[-1,\ +1]$. Этим и исчерпываются все его корни. Затем полином $\frac{d^2(x^2-1)^n}{dx^2}$ степени $2n-2$ имеет корни $x = \pm 1$ кратности $n-2$ и, кроме того, по теореме Ролля имеет два вещественных корня: один внутри $[-1,\ \xi_1]$ и другой внутри $[\xi_1,\ 1]$. Продолжая так и дальше, мы увидим, что $P_n(x)$ имеет n различных корней внутри $[-1,\ +1]$.

§ 4. Интегральные представления полиномов Лежандра

Кроме дифференциальной формулы Родрига (5) можно для полиномов Лежандра получить ряд интегральных представлений. Так, Шлэфли представил полиномы Лежандра в виде комплексных интегралов

$$P_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{1}{2^n} \frac{(z^2-1)^n}{(z-x)^{n+1}}\, dz, \tag{12}$$

где L — произвольный замкнутый контур, охватывающий точку x.

Для доказательства заметим, что по теореме Коши интеграл равен вычету подынтегральной функции, соответствующему единственному полюсу $z = x$. Коэффициент при $(z-x)^n$ в разложении полинома $(z^2-1)^n$ по степеням $(z-x)$ равен $\frac{1}{n!} \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$ и по-