Для доказательства перепишем формулу (5) следующим образом:

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}[(x+1)^n(x-1)^n]$$

и, применяя формулу Лейбница, получим

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\left[(x+1)^n\frac{d^n(x-1)^n}{dx^n}+\right.$$
$$\left.+n\frac{d(x+1)^n}{dx}\frac{d^{n-1}(x-1)^n}{dx^{n-1}}+\ldots\right].$$

Имеем, очевидно,

$$\frac{d^n(x-1)^n}{dx^n}=n! \quad \text{и} \quad \left.\frac{d^{n-k}(x-1)^n}{dx^{n-k}}\right|_{x=1}=0 \quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

откуда непосредственно следует равенство

$$P_n(1)=1.$$

Второе из равенств (11) получается из первого при помощи (9).

4) Все корни полинома Лежандра $P_n(x)$ вещественны, различны и лежат в интервале $(-1,\ +1)$.

Это утверждение легко следует из формулы (5) и теоремы Ролля. Действительно, многочлен $\frac{d(x^2-1)^n}{dx}$ степени $2n-1$ имеет корни $x=\pm 1$ кратности $n-1$ и по теореме Ролля имеет еще один корень $x=\xi_1$ внутри отрезка $[-1,\ +1]$. Этим и исчерпываются все его корни. Затем полином $\frac{d^2(x^2-1)^n}{dx^2}$ степени $2n-2$ имеет корни $x=\pm 1$ кратности $n-2$ и, кроме того, по теореме Ролля имеет два вещественных корня: один внутри $[-1,\ \xi_1]$ и другой внутри $[\xi_1,\ 1]$. Продолжая так и дальше, мы увидим, что $P_n(x)$ имеет n различных корней внутри $[-1,\ +1]$.

§ 4. Интегральные представления полиномов Лежандра

Кроме дифференциальной формулы Родрига (5) можно для полиномов Лежандра получить ряд интегральных представлений. Так, Шлэфли представил полиномы Лежандра в виде комплексных интегралов

$$P_n(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{1}{2^n}\frac{(z^2-1)^n}{(z-x)^{n+1}}dz, \tag{12}$$

где L — произвольный замкнутый контур, охватывающий точку x.

Для доказательства заметим, что по теореме Коши интеграл равен вычету подынтегральной функции, соответствующему единственному полюсу $z=x$. Коэффициент при $(z-x)^n$ в разложении полинома $(z^2-1)^n$ по степеням $(z-x)$ равен $\frac{1}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$ и потому искомый вычет есть $\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}$, а это не что иное, как $P_n(x)$.

Из формулы Шлэфли можно получить *формулу Лапласа*:

$$P_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi)^n\,d\varphi. \tag{13}$$

Пусть x — вещественное число, большее чем единица; положим, что контур L в формуле (12) есть окружность с центром x и радиусом $\sqrt{x^2-1}$. Тогда можно сделать замену переменных

$$z=x+\sqrt{x^2-1}\,e^{i\varphi},$$

причем φ изменяется от 0 до 2π.

Имеем

$$z^2-1=(x+\sqrt{x^2-1}\,e^{i\varphi})^2-1=(x^2-1)(1+e^{2i\varphi})+$$
$$+2x\sqrt{x^2-1}\,e^{i\varphi}=2\sqrt{x^2-1}\,e^{i\varphi}(x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi).$$

Подставляя в формулу (12), получим

$$P_n(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2^n}\cdot\frac{2^n(\sqrt{x^2-1}\,e^{i\varphi})^n(x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi)^n}{(\sqrt{x^2-1}\,e^{i\varphi})^{n+1}}\,i\sqrt{x^2-1}\,e^{i\varphi}\,d\varphi=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi)^n\,d\varphi=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi)^n\,d\varphi.$$

Формула (13) доказана для значений $x>1$, но так как $P_n(x)$ полином. то она справедлива и для всех значений x, причем выбор знака у радикала совершенно безразличен, потому что при разложении функции, стоящей под интегралом, по формуле бинома Ньютона и последующем затем интегрировании члены, содержащие радикалы, пропадают.

Из интегральной формулы Лапласа (13) можно получить следующую оценку:

$$|P_n(x)|\leqslant 1 \quad \text{при} \quad -1\leqslant x\leqslant 1. \tag{14}$$

Действительно,

$$|P_n(x)|\leqslant\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}|x+i\sqrt{1-x^2}\cos\varphi|^n\,d\varphi=$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\sqrt{x^2+(1-x^2)\cos^2\varphi})^n\,d\varphi=$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\sqrt{x^2\sin^2\varphi+\cos^2\varphi})^n\,d\varphi\leqslant\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}d\varphi=1.$$

Заметим, что оценку (14) для всего отрезка $[-1, +1]$ улучшить нельзя, ибо $P_n(1)=1$.

§ 5. Производящая функция

Функция

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}}$$

является *производящей функцией* для полиномов Лежандра, т. е. эти полиномы являются коэффициентами ее разложения в ряд по положительным степеням z:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}}=\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\, z^n \tag{15}$$

для любых значений x и для значений z достаточно малых: $|z|<\left|x\pm\sqrt{x^2-1}\right|$.

При сделанных предположениях, пользуясь формулой Лапласа (13), имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\, z^n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi\right)z\right]^n d\varphi=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{d\varphi}{1-\left(x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi\right)z}=$$

$$=\frac{1}{\pi z\sqrt{x^2-1}}\int_0^{\pi}\frac{d\varphi}{\dfrac{1-xz}{z\sqrt{x^2-1}}-\cos\varphi}. \tag{16}$$

Принимая во внимание, что

$$\int_0^{\pi}\frac{d\varphi}{t-\cos\varphi}=\frac{\pi}{\sqrt{t^2-1}}$$

(предполагается, что t не лежит на отрезке $[-1, +1]$ и значение корня $\sqrt{t^2-1}$ должно быть фиксировано так, чтобы было выполнено неравенство $\left|t-\sqrt{t^2-1}\right|<1$), мы видим, что правая часть равенства (16) приводится к $\dfrac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}}$.

Отметим, что ряд (15) равномерно сходится при $-1\leqslant x\leqslant+1$ и $|z|<1$, ибо $|P_n(x)|\leqslant 1$ при $-1\leqslant x\leqslant +1$ и, следовательно, $|P_n(x)\,z^n|\leqslant|z|^n$.

Если $|z|>1$, то обозначаем $z_1=\dfrac{1}{z}$. Тогда $|z_1|<1$ и мы по-