Заметим, что оценку (14) для всего отрезка $[-1, +1]$ улучшить нельзя, ибо $P_n(1)=1$.

§ 5. Производящая функция

Функция

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}}$$

является *производящей функцией* для полиномов Лежандра, т. е. эти полиномы являются коэффициентами ее разложения в ряд по положительным степеням z:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}}=\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\,z^n \tag{15}$$

для любых значений x и для значений z достаточно малых: $|z|<\left|x\pm\sqrt{x^2-1}\right|$.

При сделанных предположениях, пользуясь формулой Лапласа (13), имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\,z^n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi\right)z\right]^n d\varphi=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{d\varphi}{1-\left(x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi\right)z}=$$

$$=\frac{1}{\pi z\sqrt{x^2-1}}\int_0^{\pi}\frac{d\varphi}{\dfrac{1-xz}{z\sqrt{x^2-1}}-\cos\varphi}. \tag{16}$$

Принимая во внимание, что

$$\int_0^{\pi}\frac{d\varphi}{t-\cos\varphi}=\frac{\pi}{\sqrt{t^2-1}}$$

(предполагается, что t не лежит на отрезке $[-1, +1]$ и значение корня $\sqrt{t^2-1}$ должно быть фиксировано так, чтобы было выполнено неравенство $\left|t-\sqrt{t^2-1}\right|<1$), мы видим, что правая часть равенства (16) приводится к $\dfrac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}}$.

Отметим, что ряд (15) равномерно сходится при $-1\leqslant x\leqslant +1$ и $|z|<1$, ибо $|P_n(x)|\leqslant 1$ при $-1\leqslant x\leqslant +1$ и, следовательно, $|P_n(x)\,z^n|\leqslant |z|^n$.

Если $|z|>1$, то обозначаем $z_1=\frac{1}{z}$. Тогда $|z_1|<1$ и мы получим

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}}=\frac{z_1}{\sqrt{1-2xz_1+z_1^2}}=z_1\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)\,z_1^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{P_n(x)}{z^{n+1}}.$$

Итак,

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}}=\begin{cases}\sum\limits_{n=0}^{\infty}P_n(x)\,z^n & \text{при}\quad |z|<1,\\ \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{P_n(x)}{z^{n+1}} & \text{при}\quad |z|>1,\end{cases}\qquad (-1\leqslant x\leqslant 1).$$

§ 6. Рекуррентные соотношения между полиномами Лежандра и их производными

Исходя из производящей функции легко получить рекуррентные соотношения между полиномами Лежандра. Действительно, дифференцируя (15) по z и умножая затем на $(1-2xz+z^2)$, получим

$$\frac{x-z}{\sqrt{1-2xz+z^2}}=(1-2xz+z^2)\sum_{n=1}^{\infty}nP_n(x)\,z^{n-1}$$

или

$$(x-z)\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)\,z^n=(1-2xz+z^2)\sum_{n=1}^{\infty}nP_n(x)\,z^{n-1}.$$

Отсюда, сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z, получим:

$$(n+1)\,P_{n+1}(x)-(2n+1)\,xP_n(x)+nP_{n-1}(x)=0\quad (n=1,\ 2,\ \ldots)\qquad (17)$$

$$P_1(x)-xP_0(x)=0.\qquad (18)$$

Точно так же, дифференцируя (15) по x и умножая затем на $(1-2xz+z^2)$, будем иметь

$$P_n(x)=\frac{dP_{n+1}(x)}{dx}+\frac{dP_{n-1}(x)}{dx}-2x\frac{dP_n(x)}{dx}\qquad (19)$$

или, подставляя $P_{n+1}(x)$ из (17),

$$nP_n(x)=x\frac{dP_n(x)}{dx}-\frac{dP_{n-1}(x)}{dx}.\qquad (20)$$

Исключая $x\dfrac{dP_n(x)}{dx}$ из (19) и (20), получим

$$(2n+1)\,P_n(x)=\frac{dP_{n+1}(x)}{dx}-\frac{dP_{n-1}(x)}{dx}.\qquad (21)$$

Эта формула остается справедливой и при $n=0$, если положить $\dfrac{dP_{-1}(x)}{dx}=0$. Полагая в формуле (21) $n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n$ и