лучим

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}}=\frac{z_1}{\sqrt{1-2xz_1+z_1^2}}=z_1\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)\,z_1^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{P_n(x)}{z^{n+1}}.$$

Итак,

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}}=\begin{cases}\sum\limits_{n=0}^{\infty}P_n(x)\,z^n & \text{при} \quad |z|<1,\\ \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{P_n(x)}{z^{n+1}} & \text{при} \quad |z|>1,\end{cases} \qquad (-1\leqslant x\leqslant 1).$$

§ 6. Рекуррентные соотношения между полиномами Лежандра и их производными

Исходя из производящей функции легко получить рекуррентные соотношения между полиномами Лежандра. Действительно, дифференцируя (15) по z и умножая затем на $(1-2xz+z^2)$, получим

$$\frac{x-z}{\sqrt{1-2xz+z^2}}=(1-2xz+z^2)\sum_{n=1}^{\infty}nP_n(x)\,z^{n-1}$$

или

$$(x-z)\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)\,z^n=(1-2xz+z^2)\sum_{n=1}^{\infty}nP_n(x)\,z^{n-1}.$$

Отсюда, сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z, получим:

$$(n+1)\,P_{n+1}(x)-(2n+1)\,xP_n(x)+nP_{n-1}(x)=0 \quad (n=1,\,2,\,\ldots) \tag{17}$$

$$P_1(x)-xP_0(x)=0. \tag{18}$$

Точно так же, дифференцируя (15) по x и умножая затем на $(1-2xz+z^2)$, будем иметь

$$P_n(x)=\frac{dP_{n+1}(x)}{dx}+\frac{dP_{n-1}(x)}{dx}-2x\frac{dP_n(x)}{dx} \tag{19}$$

или, подставляя $P_{n+1}(x)$ из (17),

$$nP_n(x)=x\frac{dP_n(x)}{dx}-\frac{dP_{n-1}(x)}{dx}. \tag{20}$$

Исключая $x\dfrac{dP_n(x)}{dx}$ из (19) и (20), получим

$$(2n+1)\,P_n(x)=\frac{dP_{n+1}(x)}{dx}-\frac{dP_{n-1}(x)}{dx}. \tag{21}$$

Эта формула остается справедливой и при $n=0$, если положить $\dfrac{dP_{-1}(x)}{dx}=0$. Полагая в формуле (21) $n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n$ и складывая, получим

$$\sum_{k=0}^{n}(2k+1)\,P_k(x)=\frac{dP_{n+1}(x)}{dx}+\frac{dP_n(x)}{dx}. \qquad (22)$$

§ 7. Функция Лежандра второго рода

Для построения общего решения уравнения (4) необходимо найти еще одно его решение, линейно не зависящее от полиномов Лежандра $P_n(x)$. Не приводя здесь доказательства, укажем, что оно имеет следующий вид:

$$Q_n(x)=\frac{1}{2}P_n(x)\ln\frac{x+1}{x-1}-\sum_{k=1}^{N}\frac{2n-4k+3}{(2k-1)(n-k+1)}P_{n-2k+1}(x), \qquad (23)$$

где $N=\frac{1}{2}n$ при n четном и $N=\frac{1}{2}(n+1)$ при n нечетном. В частности, при $n=0,\ 1,\ 2,\ 3$ имеем:

$$Q_0(x)=\frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1},$$

$$Q_1(x)=\frac{x}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}-1,$$

$$Q_2(x)=\frac{1}{4}(3x^2-1)\ln\frac{x+1}{x-1}-\frac{3}{2}x,$$

$$Q_3(x)=\frac{1}{4}(5x^3-3x)\ln\frac{x+1}{x-1}-\frac{5}{2}x^2+\frac{2}{3}.$$

Так как функции $P_n(x)$ и $Q_n(x)$ линейно независимы, то общее решение уравнения (4) может быть записано в виде

$$y=C_1P_n(x)+C_2Q_n(x), \qquad (24)$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

§ 8. Малые колебания вращающейся струны

В качестве простого примера приложения полиномов Лежандра рассмотрим задачу о колебании однородной струны длиной l, закрепленной одним своим концом на неподвижной опоре и могущей свободно вращаться около точки опоры. Если мы пренебрежем силой тяжести и сопротивлением воздуха, то положение равновесия струны будет изображаться прямой линией вращающейся в плоскости, проходящей через точку опоры, с постоянной угловой скоростью ω. Струна может колебаться около этого положения равновесия, если она будет из него выведена. При изучении колебаний мы можем отвлечься от равномерного движения линии равновесия и рассматривать только смещения u струны от линии равновесия. Смещение u является функцией времени t и расстоя-