складывая, получим

$$\sum_{k=0}^{n} (2k+1) P_k(x) = \frac{dP_{n+1}(x)}{dx} + \frac{dP_n(x)}{dx}. \tag{22}$$

§ 7. Функция Лежандра второго рода

Для построения общего решения уравнения (4) необходимо найти еще одно его решение, линейно не зависящее от полиномов Лежандра $P_n(x)$. Не приводя здесь доказательства, укажем, что оно имеет следующий вид:

$$Q_n(x) = \frac{1}{2} P_n(x) \ln \frac{x+1}{x-1} - \sum_{k=1}^{N} \frac{2n-4k+3}{(2k-1)(n-k+1)} P_{n-2k+1}(x), \tag{23}$$

где $N = \frac{1}{2} n$ при n четном и $N = \frac{1}{2}(n+1)$ при n нечетном. В частности, при $n=0, 1, 2, 3$ имеем:

$$Q_0(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1},$$

$$Q_1(x) = \frac{x}{2} \ln \frac{x+1}{x-1} - 1,$$

$$Q_2(x) = \frac{1}{4}(3x^2-1) \ln \frac{x+1}{x-1} - \frac{3}{2} x,$$

$$Q_3(x) = \frac{1}{4}(5x^3-3x) \ln \frac{x+1}{x-1} - \frac{5}{2} x^2 + \frac{2}{3}.$$

Так как функции $P_n(x)$ и $Q_n(x)$ линейно независимы, то общее решение уравнения (4) может быть записано в виде

$$y = C_1 P_n(x) + C_2 Q_n(x), \tag{24}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

§ 8. Малые колебания вращающейся струны

В качестве простого примера приложения полиномов Лежандра рассмотрим задачу о колебании однородной струны длиной l, закрепленной одним своим концом на неподвижной опоре и могущей свободно вращаться около точки опоры. Если мы пренебрежем силой тяжести и сопротивлением воздуха, то положение равновесия струны будет изображаться прямой линией вращающейся в плоскости, проходящей через точку опоры, с постоянной угловой скоростью ω. Струна может колебаться около этого положения равновесия, если она будет из него выведена. При изучении колебаний мы можем отвлечься от равномерного движения линии равновесия и рассматривать только смещения u струны от линии равновесия. Смещение u является функцией времени t и расстоя-