складывая, получим

$$\sum_{k=0}^{n} (2k+1) P_k(x) = \frac{dP_{n+1}(x)}{dx} + \frac{dP_n(x)}{dx}. \qquad (22)$$

§ 7. Функция Лежандра второго рода

Для построения общего решения уравнения (4) необходимо найти еще одно его решение, линейно не зависящее от полиномов Лежандра $P_n(x)$. Не приводя здесь доказательства, укажем, что оно имеет следующий вид:

$$Q_n(x) = \frac{1}{2} P_n(x) \ln\frac{x+1}{x-1} - \sum_{k=1}^{N} \frac{2n-4k+3}{(2k-1)(n-k+1)} P_{n-2k+1}(x), \qquad (23)$$

где $N = \frac{1}{2}n$ при n четном и $N = \frac{1}{2}(n+1)$ при n нечетном. В частности, при $n=0, 1, 2, 3$ имеем:

$$Q_0(x) = \frac{1}{2} \ln\frac{x+1}{x-1},$$

$$Q_1(x) = \frac{x}{2} \ln\frac{x+1}{x-1} - 1,$$

$$Q_2(x) = \frac{1}{4}(3x^2-1) \ln\frac{x+1}{x-1} - \frac{3}{2}x,$$

$$Q_3(x) = \frac{1}{4}(5x^3-3x) \ln\frac{x+1}{x-1} - \frac{5}{2}x^2 + \frac{2}{3}.$$

Так как функции $P_n(x)$ и $Q_n(x)$ линейно независимы, то общее решение уравнения (4) может быть записано в виде

$$y = C_1 P_n(x) + C_2 Q_n(x), \qquad (24)$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

§ 8. Малые колебания вращающейся струны

В качестве простого примера приложения полиномов Лежандра рассмотрим задачу о колебании однородной струны длиной l, закрепленной одним своим концом на неподвижной опоре и могущей свободно вращаться около точки опоры. Если мы пренебрежем силой тяжести и сопротивлением воздуха, то положение равновесия струны будет изображаться прямой линией вращающейся в плоскости, проходящей через точку опоры, с постоянной угловой скоростью ω. Струна может колебаться около этого положения равновесия, если она будет из него выведена. При изучении колебаний мы можем отвлечься от равномерного движения линии равновесия и рассматривать только смещения u струны от линии равновесия. Смещение u является функцией времени t и расстояния от точки опоры x, при этом будем считать, что u перпендикулярно к плоскости вращения струны.

В случае вращающейся струны мы должны найти ускорение точки, представленное суммой двух векторов: одного постоянной длины x и другого (перпендикулярного к x) переменной длины u. Оба эти вектора вращаются с угловой скоростью ω.

Так как u параллельно оси вращения (перпендикулярно к плоскости вращения), то ускорение этой точки будет $-\omega^2 x$ вдоль оси Ox и $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ вдоль оси Ou. Сила, действующая на элемент длины dx струны на расстоянии x от неподвижной опоры, равна

$$\rho\, dx \cdot \omega^2 x,$$

где ρ — плотность струны.

Натяжение в точке x будет определяться суммой сил, действующих на все элементы струны от точки x до наружного ее конца:

$$T(x) = \int_x^l \rho\omega^2 x\, dx = \frac{\rho\omega^2}{2}(l^2 - x^2).$$

Отсюда нетрудно получить и уравнение свободных колебаний вращающейся струны, а именно:

$$\rho\, dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left[\frac{\rho\omega^2}{2}(l^2 - x^2)\frac{\partial u}{\partial x}\right]_{x+dx} - \left[\frac{\rho\omega^2}{2}(l^2 - x^2)\frac{\partial u}{\partial x}\right]_x = \frac{\rho\omega^2}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left[(l^2 - x^2)\frac{\partial u}{\partial x}\right] dx$$

или

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial}{\partial x}\left[(l^2 - x^2)\frac{\partial u}{\partial x}\right] \quad \left(a^2 = \frac{\omega^2}{2}\right). \tag{25}$$

Очевидно, что мы решим поставленную задачу о малых колебаниях вращающейся струны, если найдем решение уравнения (25), удовлетворяющее граничному условию

$$u\,|_{x=0} = 0 \tag{26}$$

и начальным условиям

$$u\,|_{t=0} = f(x), \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = F(x). \tag{27}$$

Будем искать частные решения уравнения (25), удовлетворяющие условию (26), в виде

$$u = T(t)\, X(x). \tag{28}$$

Подставляя в (25), имеем:

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{\frac{d}{dx}\left[(l^2 - x^2)\, X'(x)\right]}{X(x)}.$$

Обозначая обе части этого равенства через $-\lambda$, получим два уравнения

$$T''(t)+a^2\lambda T(t)=0, \tag{29}$$

$$\frac{d}{dx}[(l^2-x^2)X'(x)]+\lambda X(x)=0 \tag{30}$$

Полагая $x=l\xi$, преобразуем уравнение (30) к виду

$$\frac{d}{d\xi}\left[(1-\xi^2)\frac{dX}{d\xi}\right]+\lambda X=0. \tag{31}$$

Это есть уравнение Лежандра.

По своему физическому смыслу смещение струны $u(x, t)$ должно оставаться ограниченным в промежутке $[0, l]$. Поэтому нужно найти такие решения уравнения (30), которые ограничены в этом промежутке, включая его концы. В начале этой главы было показано, что при $\lambda=n(n+1)$, где n — целое положительное число, уравнение Лежандра (31) в промежутке $[-1, 1]$ имеет решение, ограниченное в точках $\xi=\pm 1$. Это решение есть полином Лежандра $P_n(\xi)$. Следовательно, возвращаясь к переменной x, мы можем утверждать, что

$$X(x)=P_n\left(\frac{x}{l}\right) \tag{32}$$

есть решение уравнения (30), ограниченное в точках $x=\pm l$ при $\lambda=n(n+1)$.

Удовлетворяя граничному условию (26), получим

$$P_n(0)=0.$$

Это возможно, когда $n=2k-1$, где k — целое положительное число.

Таким образом, нетривиальные решения уравнения (30) при граничных условиях

$$X(0)=0, \quad X(l) \text{ — ограничено} \tag{33}$$

возможны лишь при значениях

$$\lambda_k=2k(2k-1) \quad (k=1, 2, 3, \ldots). \tag{34}$$

Этим собственным числам соответствуют собственные функции

$$X_k(x)=P_{2k-1}\left(\frac{x}{l}\right), \tag{35}$$

которые образуют ортогональную систему функций на отрезке $[0, l]$.

При $\lambda=\lambda_k$ общее решение уравнения (29) имеет вид

$$T_k(t)=a_k\cos\sqrt{2k(2k-1)}\,at+b_k\sin\sqrt{2k(2k-1)}\,at. \tag{36}$$

В силу (28), получим, что функции

$$u_k(x, t) = \left[a_k \cos \sqrt{2k(2k-1)}\, at + b_k \sin \sqrt{2k(2k-1)}\, at\right] P_{2k-1}\left(\frac{x}{l}\right) \qquad (37)$$

удовлетворяют уравнению (25) и граничному условию (26) при любых a_k и b_k. Для решения задачи составляем ряд

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos \sqrt{2k(2k-1)}\, at + b_k \sin \sqrt{2k(2k-1)}\, at\right] P_{2k-1}\left(\frac{x}{l}\right) \qquad (38)$$

и требуем, чтобы выполнялись начальные условия (27):

$$u(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k P_{2k-1}\left(\frac{x}{l}\right) = f(x), \qquad (39)$$

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2k(2k-1)}\, ab_k P_{2k-1}\left(\frac{x}{l}\right) = F(x). \qquad (40)$$

Предполагая, что ряд (39) сходится равномерно, мы можем определить коэффициенты a_k, умножив обе части равенства (39) на $P_{2k-1}\left(\frac{x}{l}\right)$ и проинтегрировав по x в интервале от 0 до l; тогда, принимая во внимание ортогональность собственных функций, получим

$$\int_0^l f(x) P_{2k-1}\left(\frac{x}{l}\right) dx = a_k \int_0^l P_{2k-1}^2\left(\frac{x}{l}\right) dx = \frac{la_k}{2} \int_{-1}^{1} P_{2k-1}^2(\xi)\, d\xi = \frac{l}{4k-1} a_k.$$

Отсюда

$$a_k = \frac{4k-1}{l} \int_0^l f(x) P_{2k-1}\left(\frac{x}{l}\right) dx. \qquad (41)$$

Аналогично найдем

$$b_k = \frac{4k-1}{al\sqrt{2k(2k-1)}} \int_0^l F(x) P_{2k-1}\left(\frac{x}{l}\right) dx. \qquad (42)$$

Таким образом, решение задачи дается рядом (38), где a_k и b_k определяются формулами (41) и (42).

Переписав решение (38) в виде

$$u(x, t)=\sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\left(\sqrt{2k(2k-1)}\,at+\varphi_k\right) P_{2k-1}\left(\frac{x}{l}\right), \tag{43}$$

мы видим, что малые колебания вращающейся струны слагаются из гармонических колебаний. Частота колебаний ω_k k-го обертона выражается формулой

$$\omega_k=\sqrt{2k(2k-1)}\,a=\sqrt{k(2k-1)}\,\omega.$$

Отсюда следует, что частоты колебаний зависят от угловой скорости ω и не зависят от длины струны и ее плотности (до тех пор, пока плотность постоянна). При увеличении длины или плотности увеличивается масса струны, которая стремится понизить частоту; при этом также увеличивается натяжение, что должно вызывать повышение частоты. Эти два фактора компенсируют друг друга.

ЗАДАЧИ

1. Доказать, что

$$\int_0^1 P_n(x)\,dx=\begin{cases} 1 \text{ при } n=0,\\ 0 \text{ при } n=2k,\ k>0,\\ (-1)^k \dfrac{(2k)!}{2^{2k+1}k!\,(k+1)!} \text{ при } n=2k+1. \end{cases}$$

2. Доказать, что

$$\int_0^1 xP_k(x)\,dx=\begin{cases} 0 \quad \text{при} \quad k=2n+1 \quad (n>0),\\ \dfrac{(-1)^n(2n-2)!}{2^{2n}(n-1)!\,(n+1)!} \text{ при } k=2n \quad (n>0). \end{cases}$$

3. Разложить в ряд по полиномам Лежандра функцию $f(x)$, заданную следующим образом:

$$f(x)=\begin{cases} 0 \quad \text{при} \quad -1\leqslant x<0.\\ 1 \quad \text{при} \quad 0<x\leqslant 1. \end{cases}$$

Ответ:

$$f(x)=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}P_1(x)-\frac{7\cdot 2!}{2^4\cdot 2!\cdot 1!}P_2(x)+\frac{11\cdot 4!}{2^6\cdot 3!\cdot 2!}P_3(x)-\ldots$$

4. Однородная струна, вращающаяся так, как это указано в § 8 этой главы, находится под действием силы $\rho Y(x, t)$, непрерывно распределенной вдоль всей ее длины. Доказать, что вынужденные колебания струны выражаются равенством

$$u(x, t)=\sum_{k=1}^{\infty} T_k(t)\,P_{2k-1}\left(\frac{x}{l}\right),$$

где

$$T_k(t)=\frac{4k-1}{al\sqrt{2k(2k-1)}}\int_0^t d\tau\int_0^l Y(\xi, \tau)\sin\omega_k(t-\tau)\,P_{2k-1}\left(\frac{\xi}{l}\right)d\xi.$$