Глава XVII

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ФУРЬЕ К ИССЛЕДОВАНИЮ МАЛЫХ КОЛЕБАНИЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ И КРУГЛОЙ МЕМБРАНЫ

§ 1. Свободные колебания прямоугольной мембраны

Рассмотрим малые колебания однородной прямоугольной мембраны со сторонами p и q, закрепленной по контуру.

В гл. I было показано, что эта задача сводится к решению волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \tag{1}$$

при граничных условиях:

$$\begin{aligned} u\,|_{x=0}&=0, \qquad u\,|_{x=p}=0,\\ u\,|_{y=0}&=0, \qquad u\,|_{y=q}=0 \end{aligned} \tag{2}$$

и начальных условиях:

$$u\,|_{t=0}=f(x,\ y),\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=F(x,\ y). \tag{3}$$

Будем искать частные решения уравнения (1) в виде

$$u(x,\ y,\ t)=T(t)\,v(x,\ y), \tag{4}$$

удовлетворяющие граничным условиям (2).

Подставив (4) в уравнение (1), получим

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)}=\frac{v_{xx}+v_{yy}}{v}\,.$$

Очевидно, что это равенство может иметь место только в том случае, когда обе его части равны одной и той же постоянной величине. Обозначим эту постоянную через $-k^2$ и, принимая во внимание граничные условия (2), найдем что

$$T''(t)+(ak)^2\,T(t)=0 \tag{5}$$

и

$$v_{xx}+v_{yy}+k^2v=0, \tag{6}$$

$$\begin{aligned} v\,|_{x=0}&=0, \quad v\,|_{x=p}=0,\\ v\,|_{y=0}&+0, \quad v\,|_{y=q}=0. \end{aligned} \tag{7}$$

Граничную задачу (6), (7) будем решать методом Фурье, полагая

$$v(x,\ y)=X(x)\,Y(y). \tag{8}$$

Подставляя (8) в уравнение (6), получим

$$\frac{Y''(y)}{Y(y)}+k^2=-\frac{X''(x)}{X(x)}\,,$$

откуда получаем два уравнения:

$$X''(x)+k_1^2 X(x)=0, \qquad Y''(y)+k_2^2 Y(y)=0, \tag{9}$$

где

$$k_2^2=k^2-k_1^2 \quad \text{или} \quad k^2=k_1^2+k_2^2. \tag{10}$$

Общие решения уравнений (9), как известно, имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} X(x) &= C_1 \cos k_1 x + C_2 \sin k_1 x, \\ Y(y) &= C_3 \cos k_2 y + C_4 \sin k_2 y. \end{aligned} \tag{11}$$

Из граничных условий (7) получим

$$\begin{aligned} X(0)=0, \qquad X(p)=0, \\ Y(0)=0, \qquad Y(q)=0, \end{aligned} \tag{12}$$

откуда ясно, что $C_1=C_3=0$, и если мы положим $C_2=C_4=1$, то окажется:

$$X(x)=\sin k_1 x, \qquad Y(y)=\sin k_2 y, \tag{13}$$

причем должно быть

$$\sin k_1 p=0, \qquad \sin k_2 q=0. \tag{14}$$

Из уравнений (14) вытекает, что k_1 и k_2 имеют бесчисленное множество значений:

$$k_{1m}=\frac{m\pi}{p}, \quad k_{2m}=\frac{n\pi}{q} \qquad (m, \ n=1, \ 2, \ 3, \ \ldots).$$

Тогда из равенства (10) получим соответствующие значения постоянной k^2:

$$k_{mn}^2=k_{1m}^2+k_{2n}^2=\pi^2\left(\frac{m^2}{p^2}+\frac{n^2}{q^2}\right). \tag{15}$$

Таким образом, собственным числам (15) соответствуют собственные функции

$$v_{mn}(x, \ y)=\sin\frac{m\pi x}{p}\sin\frac{n\pi y}{q} \tag{16}$$

граничной задачи (6), (7).

Обращаясь теперь к уравнению (5), видим, что для каждого собственного числа $k^2=k_{mn}^2$ его общее решение имеет вид

$$T_{mn}(t)=A_{mn}\cos ak_{mn}t+B_{mn}\sin ak_{mn}t. \tag{17}$$

Таким образом, в силу (4), (16) и (17), частные решения уравнения (1), удовлетворяющие граничным условиям (2) имеют вид:

$$u_{mn}(x, \ y, \ t)=(A_{mn}\cos ak_{mn}t+B_{mn}\sin ak_{mn}t)\sin\frac{m\pi x}{p}\sin\frac{n\pi y}{q}. \tag{18}$$

Чтобы удовлетворить начальным условиям (3), составим ряд

$$u(x, y, t)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(A_{mn}\cos ak_{mn}t+B_{mn}\sin ak_{mn}t)\sin\frac{m\pi x}{p}\sin\frac{n\pi y}{q}. \tag{19}$$

Если этот ряд равномерно сходится, так же как и ряды, полученные из него двукратным почленным дифференцированием по x, y и t, то сумма его, очевидно, будет удовлетворять уравнению (1) и граничным условиям (2). Для выполнения начальных условий (3) необходимо, чтобы

$$u|_{t=0}=f(x, y)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}A_{mn}\sin\frac{m\pi x}{p}\sin\frac{n\pi y}{q}, \tag{20}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=F(x, y)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}ak_{mn}B_{mn}\sin\frac{m\pi x}{p}\sin\frac{n\pi y}{q}. \tag{21}$$

Предполагая, что ряды (20) и (21) сходятся равномерно, мы можем определить коэффициенты A_{mn} и B_{mn}, умножив обе части равенств (20) и (21) на

$$\sin\frac{m_1\pi x}{p}\sin\frac{n_1\pi y}{q}$$

и проинтегрировав по x в интервале от 0 до p и по y от 0 до q. Тогда, приняв во внимание, что

$$\int_0^p\int_0^q \sin\frac{m\pi x}{p}\sin\frac{n\pi y}{q}\sin\frac{m_1\pi x}{p}\sin\frac{n_1\pi y}{q}\,dx\,dy=$$

$$=\begin{cases} 0, & \text{если} \quad m\neq m_1, \\ & \text{или} \quad n\neq n_1, \\ \dfrac{pq}{4}, & \text{если} \quad m_1=m, \quad n_1=n, \end{cases}$$

получим

$$\begin{aligned} A_{mn}&=\frac{4}{pq}\int_0^p\int_0^q f(x, y)\sin\frac{m\pi x}{p}\sin\frac{n\pi y}{p}\,dx\,dy, \\ B_{mn}&=\frac{4}{apqk_{mn}}\int_0^p\int_0^q F(x, y)\sin\frac{m\pi x}{p}\sin\frac{n\pi y}{q}\,dx\,dy. \end{aligned} \tag{22}$$

Решение (19) можно записать также в виде

$$u(x, y, t)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}M_{mn}\sin\frac{m\pi x}{p}\sin\frac{n\pi y}{q}\sin(ak_{mn}t+\varphi_{mn}), \tag{23}$$

где

$$M_{mn}=\sqrt{A_{mn}^2+B_{mn}^2},\quad \varphi_{mn}=\operatorname{arctg}\frac{A_{mn}}{B_{mn}}.$$

Рассматривая равенство (23), видим, что отдельные его члены выражают собой гармоническое колебательное движение, и, следовательно, общее колебание мембраны слагается из бесчисленного множества собственных гармонических колебаний типа стоячих волн.

Частота каждого собственного колебания определяется по формуле

$$\omega_{mn}=a\pi\sqrt{\frac{m^2}{p^2}+\frac{n^2}{q^2}},\tag{24}$$

а период колебаний по формуле

$$T_{mn}=\frac{2pq}{a\sqrt{m^2q^2+n^2p^2}}.\tag{25}$$

Мембрана отличается от струны тем, что для последней каждой частоте собственных колебаний соответствует своя форма струны, которая просто разделяется узлами на несколько равных частей. Для мембраны же может оказаться, что одной и той же частоте соответствует несколько фигур мембраны с различными положениями узловых линий, вдоль которых амплитуды собственных гармонических колебаний равны нулю. Проще всего это исследовать на примере квадратной мембраны

$$p=q=\pi.$$

В этом случае частота ω_{mn} будет вычисляться по формуле

$$\omega_{mn}=a\sqrt{m^2+n^2}.$$

Из этой формулы видно, что основной тон, определяемый выражением

$$u_{11}=M_{11}\sin(\omega_{11}t+\varphi_{11})\sin x\sin y,$$

имеет частоту $\omega_{11}=a\sqrt{2}$, причем очевидно, что для этой частоты узловые линии совпадают со сторонами квадрата, образуемого мембраной.

В тех случаях, когда

$$m=1,\ n=2\quad\text{или}\quad m=2,\ n=1,$$

имеем два обертона:

$$u_{12}=M_{12}\sin(\omega_{12}t+\varphi_{12})\sin x\sin 2y,$$
$$u_{21}=M_{21}\sin(\omega_{21}t+\varphi_{21})\sin 2x\sin y$$

с одной и той же частотой

$$\omega=\omega_{12}=\omega_{21}=a\sqrt{5}.$$

Ясно, что для этой частоты узловые линии определяются из уравнения

$$\alpha \sin x \sin 2y + \beta \sin 2x \sin y = 0,$$

или

$$\alpha \cos y + \beta \cos x = 0.$$

Простейшие из них изображены на рис. 25 пунктирными линиями. Более сложные узловые линии при той же частоте получим, когда $\alpha \neq \pm \beta$ и $\alpha, \beta \neq 0$, но мы их приводить не будем.

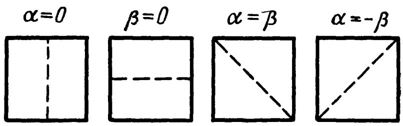

Рис. 25

Аналогичным способом изучают узловые линии и следующих обертонов.

В ы н у ж д е н н ы е к о л е б а н и я прямоугольной мембраны исследуются совершенно так же, как и вынужденные колебания струны, с той лишь разницей, что внешняя сила $\Phi(x, y, t)$ разлагается не в простой, а в двойной ряд Фурье.

§ 2. Свободные колебания круглой мембраны

Рассмотрим задачу о колебании круглой мембраны радиуса l, закрепленной по контуру. Эта задача приводится к решению волнового уравнения в полярных координатах:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{26}$$

при граничном условии

$$u|_{r=l} = 0 \tag{27}$$

и начальных условиях

$$u|_{t=0} = f(r, \varphi), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = F(r, \varphi). \tag{28}$$

Из физического смысла задачи ясно, что решение $u(r, \varphi, t)$ должно быть однозначной периодической функцией от φ с периодом 2π и оставаться ограниченным во всех точках мембраны, в том числе и в центре мембраны $r = 0$.

Применяя метод Фурье, положим

$$u(r, \varphi, t) = T(t)\, v(r, \varphi). \tag{29}$$

Мы получим уравнение для $T(t)$:

$$T''(t) + a^2\lambda^2 T(t) = 0,$$

его общее решение

$$T(t) = C_1 \cos a\lambda t + C_2 \sin a\lambda t, \tag{30}$$