Ясно, что для этой частоты узловые линии определяются из уравнения

$$\alpha \sin x \sin 2y + \beta \sin 2x \sin y = 0,$$

или

$$\alpha \cos y + \beta \cos x = 0.$$

Простейшие из них изображены на рис. 25 пунктирными линиями. Более сложные узловые линии при той же частоте получим, когда $\alpha \neq \pm \beta$ и $\alpha,\ \beta \neq 0$, но мы их приводить не будем.

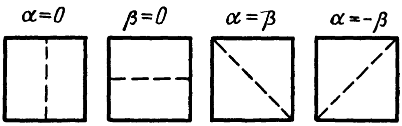

Рис. 25

Аналогичным способом изучают узловые линии и следующих обертонов.

Вынужденные колебания прямоугольной мембраны исследуются совершенно так же, как и вынужденные колебания струны, с той лишь разницей, что внешняя сила $\Phi(x,\ y,\ t)$ разлагается не в простой, а в двойной ряд Фурье.

§ 2. Свободные колебания круглой мембраны

Рассмотрим задачу о колебании круглой мембраны радиуса l, закрепленной по контуру. Эта задача приводится к решению волнового уравнения в полярных координатах:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{26}$$

при граничном условии

$$u\,|_{r=l} = 0 \tag{27}$$

и начальных условиях

$$u\,|_{t=0} = f(r,\ \varphi),\quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = F(r,\ \varphi). \tag{28}$$

Из физического смысла задачи ясно, что решение $u(r,\ \varphi,\ t)$ должно быть однозначной периодической функцией от φ с периодом 2π и оставаться ограниченным во всех точках мембраны, в том числе и в центре мембраны $r=0$.

Применяя метод Фурье, положим

$$u(r,\ \varphi,\ t) = T(t)\,v(r,\ \varphi). \tag{29}$$

Мы получим уравнение для $T(t)$:

$$T''(t) + a^2\lambda^2 T(t) = 0,$$

его общее решение

$$T(t) = C_1 \cos a\lambda t + C_2 \sin a\lambda t, \tag{30}$$

и следующую граничную задачу для функции $v(r, \varphi)$:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2}+\lambda^2 v=0, \tag{31}$$

$$v\,|_{r=l}=0, \tag{32}$$

$$v_{r=0}=\text{конечной величине},\ v(r, \varphi)=v(r, \varphi+2\pi). \tag{33}$$

Будем искать решение уравнения (31) в виде

$$v(r, \varphi)=R(r)\,\Phi(\varphi). \tag{34}$$

Подставив в уравнение (31) и разделив переменные, получим

$$\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)}=-\frac{r^2R''(r)+rR'(r)+\lambda^2r^2R(r)}{R(r)}=-p^2,$$

откуда, приняв во внимание (32), (33) и (34), придем к двум граничным задачам:

$$\Phi''(\varphi)+p^2\Phi(\varphi)=0, \tag{35}$$

$$\Phi(\varphi)=\Phi(\varphi+2\pi), \quad \Phi'(\varphi)=\Phi'(\varphi+2\pi); \tag{36}$$

$$R''(r)+\frac{1}{r}R'(r)+\left(\lambda^2-\frac{p^2}{r^2}\right)R(r)=0, \tag{37}$$

$$R(l)=0, \quad R(0)=\text{конечной величине}. \tag{38}$$

Нетрудно видеть, что нетривиальные периодические решения задачи (35)—(36) существуют лишь при условии, что $p=n$ (n — целое число) и имеют вид

$$\Phi_n(\varphi)=A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Вернемся к уравнению (37). Его общее решение при $p=n$ имеет вид:

$$R_n(r)=D_nJ_n(\lambda r)+E_nY_n(\lambda r).$$

Из второго условия (38) следует, что $E_n=0$. Первое условие дает

$$J_n(\lambda l)=0.$$

Положив $\lambda l=\mu$, получим трансцендентное уравнение для определения μ:

$$J_n(\mu)=0, \tag{39}$$

которое, как известно, имеет бесчисленное множество положительных корней

$$\mu_1^{(n)},\ \mu_2^{(n)},\ \mu_3^{(n)},\ \ldots,$$

которым соответствуют значения

$$\lambda_{nm}=\frac{\mu_m^{(n)}}{l} \quad (m=1,\ 2,\ \ldots,\ n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

и соответствующие решения задачи (37)—(38)

$$R_{nm}(r)=J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}r}{l}\right).$$

Возвращаясь к задаче (31)—(33), найдем, что собственному значению $\lambda_{nm}^2=\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{l}\right)^2$ соответствуют две линейно-независимые собственные функции

$$J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}r}{l}\right)\cos n\varphi,\quad J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}r}{l}\right)\sin n\varphi\quad (m=1,\,2,\,\ldots,\; n=0,\,1,\,2\ldots).$$

Из вышеизложенного вытекает, что можно составить бесчисленное множество частных решений уравнения (26), удовлетворяющих граничному условию (27) и имеющих вид:

$$u_{nm}(r,\,\varphi,\,t)=\left[\left(A_{nm}\cos\frac{a\mu_m^{(n)}t}{l}+B_{nm}\sin\frac{a\mu_m^{(n)}t}{l}\right)\cos n\varphi+\right.$$
$$\left.+\left(C_{nm}\cos\frac{a\mu_m^{(n)}t}{l}+D_{nm}\sin\frac{a\mu_m^{(n)}t}{l}\right)\sin n\varphi\right]J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}r}{l}\right).$$

Чтобы удовлетворить начальным условиям (28), составим ряд

$$u(r,\,\varphi,\,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left[\left(A_{nm}\cos\frac{a\mu_m^{(n)}t}{l}+B_{nm}\sin\frac{a\mu_m^{(n)}t}{l}\right)\cos n\varphi+\right.$$
$$\left.+\left(C_{nm}\cos\frac{a\mu_m^{(n)}t}{l}+D_{nm}\sin\frac{a\mu_m^{(n)}t}{l}\right)\sin n\varphi\right]J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}r}{l}\right).\tag{40}$$

Коэффициенты A_{nm}, B_{nm}, C_{nm} и D_{nm} определяются из начальных условий (28). Действительно, полагая в ряде (40) $t=0$, получим

$$f(r,\,\varphi)=\sum_{m=1}^{\infty}A_{0m}J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}r}{l}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty}A_{nm}J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}r}{l}\right)\right)\cos n\varphi+$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty}C_{nm}J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}r}{l}\right)\right)\sin n\varphi.\tag{41}$$

Этот ряд представляет собой разложение периодической функции $f(r,\,\varphi)$ в ряд Фурье в интервале $(0,\,2\pi)$ и, следовательно, стоящие здесь множители при $\cos n\varphi$ и $\sin n\varphi$ должны быть коэффициентами Фурье; другими словами, должны иметь место следующие равенства

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(r,\,\varphi)\,d\varphi=\sum_{m=1}^{\infty}A_{0m}J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}r}{l}\right),\tag{42}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(r,\,\varphi)\cos n\varphi\,d\varphi=\sum_{m=1}^{\infty}A_{nm}J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}r}{l}\right),\tag{43}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(r,\,\varphi)\sin n\varphi\,d\varphi=\sum_{m=1}^{\infty}C_{nm}J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}r}{l}\right).\tag{44}$$

Рассматривая эти равенства, мы убеждаемся, что они представляют разложения произвольной функции $\Phi(r)$ в ряд по функциям Бесселя:

$$\Phi(r) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)} r}{l}\right).$$

В гл. XIII было показано, что коэффициенты a_m определяются формулой

$$a_m = \frac{2}{l^2 J_{n+1}^2\left(\mu_m^{(n)}\right)} \int_0^l r\Phi(r) J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)} r}{l}\right) dr.$$

Принимая во внимание эту формулу, без труда убедимся, что

$$A_{0m} = \frac{2}{\pi l^2 J_1^2\left(\mu_m^{(0)}\right)} \int_0^l \int_2^{2\pi} f(r, \varphi) J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)} r}{l}\right) r\, dr\, d\varphi, \tag{45}$$

$$A_{nm} = \frac{2}{\pi l^2 J_{n+1}^2\left(\mu_m^{(n)}\right)} \int_0^l \int_0^{2\pi} f(r, \varphi) J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)} r}{l}\right) \cos n\varphi\, r\, dr\, d\varphi. \tag{46}$$

$$C_{nm} = \frac{2}{\pi l^2 J_{n+1}^2\left(\mu_m^{(n)}\right)} \int_0^l \int_0^{2\pi} f(r, \varphi) J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)} r}{l}\right) \sin n\varphi\, r\, dr\, d\varphi. \tag{47}$$

Рассуждая аналогичным образом, мы определим и коэффициенты B_{0m}, B_{nm}, D_{nm} — нужно только заменить в формулах (45), (46) и (47) $f(r, \varphi)$ на $F(r, \varphi)$ и разделить соответствующие выражения на $\frac{a\mu_m^{(n)}}{l}$. Таким образом, все коэффициенты в разложении (40) определены, и мы можем переписать найденное нами решение задачи (26) — (28) в виде:

$$u(r, \varphi, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} M_{nm} J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)} r}{l}\right) \sin(n\varphi + \psi_{nm}) \sin\left(\frac{\mu_m^{(n)} at}{l} + \nu_{nm}\right), \tag{48}$$

где постоянные M_{nm}, ψ_{nm} и ν_{nm} связаны очевидным образом с постоянными A_{nm}, B_{nm}, C_{nm} и D_{nm}.

Из выражения (48) видно, что общее колебание круглой мембраны складывается из бесчисленного множества собственных гармонических колебаний с частотой

$$\omega_{nm} = \frac{\mu_m^{(n)}}{l} \sqrt{\frac{T_0}{\sigma}},$$

где T_0 — натяжение, а σ — поверхностная плотность мембраны. При $n = 0$ и $m = 1$ мы имеем о с н о в н о й т о н наименьшей частоты

$$\omega_{01} = \frac{\mu_1^{(0)}}{l} \sqrt{\frac{T_0}{\sigma}}.$$

Кроме того, формула (48) показывает, что для круглой мембраны стоячие волны различной частоты имеют узловые линии. Простейшие из этих линий определяются уравнениями:

$$J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)} r}{l}\right)=0, \qquad \sin(n\varphi+\psi_{nm})=0. \tag{49}$$

Первое из этих уравнений определяет $m-1$ окружностей, концентричных с контуром мембраны и имеющих следующие уравнения:

$$r_1=\frac{\mu_1^{(n)}}{\mu_m^{(n)}}l,\ r_2=\frac{\mu_2^{(n)}}{\mu_m^{(n)}}l,\ \ldots,\ r_{m-1}=\frac{\mu_{m-1}^{(n)}}{\mu_m^{(n)}}l.$$

Второе из уравнений (49) определяет n диаметров мембраны с уравнениями

$$\varphi_1=-\frac{\psi_{nm}}{n},\quad \varphi_2=\frac{\pi}{n}-\frac{\psi_{nm}}{n},\ \ldots,\ \varphi_n=\frac{(n-1)\pi}{n}-\frac{\psi_{nm}}{n}.$$

На рис. 26 изображены некоторые простейшие случаи расположения узловых линий.

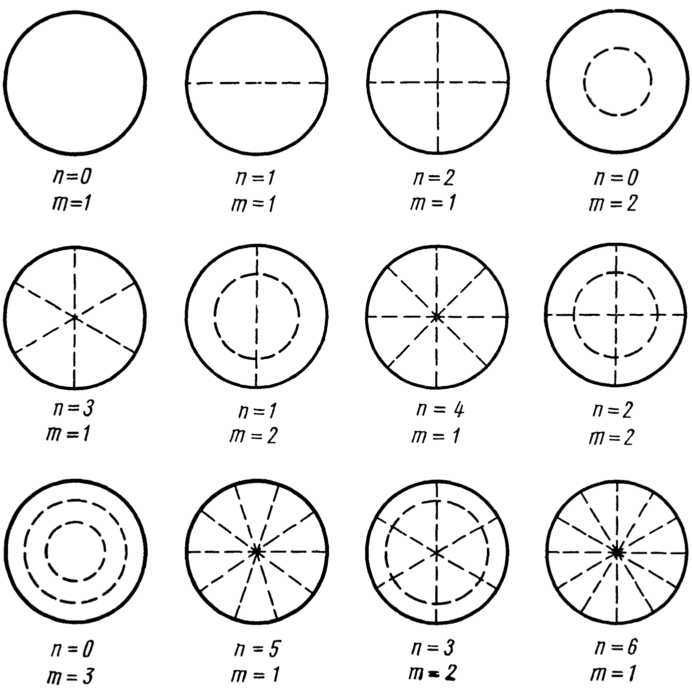

Рис. 26

В случае радиальных колебаний круглой мембраны начальные функции зависят только от r:

$$u\Big|_{t=0}=f(r), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=F(r). \tag{50}$$

Тогда из формул (45), (46), (47) и им аналогичным следует, что

$$A_{0m}=\frac{2}{l^2 J_1^2(\mu_m^{(0)})}\int_0^l rf(r)\,J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}r}{l}\right)dr,$$

$$B_{0m}=\frac{2}{al\mu_m^{(0)}J_1^2(\mu_m^{(0)})}\int_0^l rF(r)\,J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}r}{l}\right)dr,$$

и при $n>0$ коэффициенты A_{nm}, B_{nm}, C_{nm} и D_{nm} равны нулю. Ряд (40) сводится к ряду

$$u(r,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\left(A_{0m}\cos\frac{a\mu_m^{(0)}t}{l}+B_{0m}\sin\frac{a\mu_m^{(0)}t}{l}\right)J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}r}{l}\right), \tag{51}$$

где $\mu_m^{(0)}$ — положительные корни уравнения $J_0(\mu)=0$.

§ 3. Метод Фурье в многомерном случае

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=L(u), \tag{52}$$

где

$$L(u)=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(X)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)-a(X)\,u,$$

коэффициенты которого определены в конечной, связной области Ω изменения $X=(x_1,\ldots,x_n)$ и удовлетворяют в Ω условиям

$$a(X)\geqslant 0, \quad a_{ij}=a_{ji}, \quad \sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\xi_i\xi_j\geqslant\alpha\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2, \quad \alpha>0. \tag{53}$$

Второе из неравенств (53) выражает тот факт, что уравнение (52) принадлежит гиперболическому типу.

Для уравнения (52) рассмотрим следующую смешанную задачу: *определить в цилиндре* $Q_T=\Omega\,[0<t<T]$ решение *уравнения* (52), *удовлетворяющее начальным условиям*

$$u\Big|_{t=0}=\varphi_0(X), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\varphi_1(X) \tag{54}$$

и граничному условию

$$u\big|_{S=0} \text{ при } t\in[0,\,T], \tag{55}$$

где S есть граница области Ω.