В случае радиальных колебаний круглой мембраны начальные функции зависят только от r:

$$u\Big|_{t=0}=f(r),\quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=F(r). \tag{50}$$

Тогда из формул (45), (46), (47) и им аналогичным следует, что

$$A_{0m}=\frac{2}{l^2J_1^2(\mu_m^{(0)})}\int\limits_0^l rf(r)\,J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}r}{l}\right)dr,$$

$$B_{0m}=\frac{2}{al\mu_m^{(0)}J_1^2(\mu_m^{(0)})}\int\limits_0^l rF(r)\,J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}r}{l}\right)dr,$$

и при $n>0$ коэффициенты A_{nm}, B_{nm}, C_{nm} и D_{nm} равны нулю. Ряд (40) сводится к ряду

$$u(r,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\left(A_{0m}\cos\frac{a\mu_m^{(0)}t}{l}+B_{0m}\sin\frac{a\mu_m^{(0)}t}{l}\right)J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}r}{l}\right), \tag{51}$$

где $\mu_m^{(0)}$ — положительные корни уравнения $J_0(\mu)=0$.

§ 3. Метод Фурье в многомерном случае

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=L(u), \tag{52}$$

где

$$L(u)=\sum_{i,\,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(X)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)-a(X)\,u,$$

коэффициенты которого определены в конечной, связной области Ω изменения $X=(x_1,\ldots,x_n)$ и удовлетворяют в Ω условиям

$$a(X)\geqslant 0,\quad a_{ij}=a_{ji},\quad \sum_{i,\,j=1}^{n}a_{ij}\xi_i\xi_j\geqslant\alpha\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2,\quad \alpha>0. \tag{53}$$

Второе из неравенств (53) выражает тот факт, что уравнение (52) принадлежит гиперболическому типу.

Для уравнения (52) рассмотрим следующую смешанную задачу: *определить в цилиндре* $Q_T=\Omega\,[0<t<T]$ решение *уравнения* (52), *удовлетворяющее начальным условиям*

$$u\Big|_{t=0}=\varphi_0(X),\quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\varphi_1(X) \tag{54}$$

и граничному условию

$$u|_{S=0}\ \text{при}\ t\in[0,\,T], \tag{55}$$

где S есть граница области Ω.

Будем искать сначала нетривиальные решения уравнения (52) в виде произведения

$$u = v(X)\,T(t), \tag{56}$$

удовлетворяющие граничному условию (55). Подставив (56) в уравнение (52), получим

$$v(X)\,T''(t) = \left[\sum_{i,\,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(X)\frac{\partial v}{\partial x_j}\right) - a(X)\,v\right] T(t)$$

или

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{L(v)}{v} = -\lambda,$$

откуда

$$T''(t) + \lambda T(t) = 0, \tag{57}$$

$$L(v) + \lambda v = 0. \tag{58}$$

Чтобы получить нетривиальные решения уравнения (52) вида (56), удовлетворяющие граничному условию (55), необходимо, чтобы функция $v(X)$ удовлетворяла граничному условию

$$v\,\big|_{S=0}. \tag{59}$$

Таким образом, мы приходим к следующей задаче: *найти такие значения* λ, *при которых уравнение* (58) *имеет нетривиальные решения, удовлетворяющие граничному условию* (59).

Эти значения λ называются *собственными числами*, а соответствующие решения — *собственными функциями* граничной задачи (58), (59).

Можно доказать, что задача (58), (59) имеет бесконечное множество собственных чисел

$$\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n \leqslant, \ldots, \lim_{n \to \infty} \lambda_n = \infty.$$

Ввиду однородности уравнения (58) и граничного условия (59) собственные функции $v_k(X)$ определяются с точностью до произвольного постоянного. Выберем этот множитель так, чтобы

$$\int_{\Omega} v_k^2(X)\,dX = 1, \tag{60}$$

т. е. будем считать собственные функции нормированными. Собственные функции, соответствующие различным собственным числам, ортогональны:

$$\int_{\Omega} v_k(X)\,v_m(X)\,dX = 0, \quad (k \neq m). \tag{61}$$

Это доказывается совершенно так же, как и в однородном случае, причем используется формула интегрирования по частям для многомерных интегралов. Если собственному числу λ_k соответствует несколько линейно независимых собственных функций, то их можно подвергнуть процессу ортогонализации и, следовательно, считать эти функции попарно ортогональными.

Таким образом, мы можем считать, что все собственные функции задачи (58), (59) образуют ортогональную и нормированную систему.

Пусть λ_k — собственные числа, а $v_k(X)$ — собственные функции, образующие ортогональную и нормированную систему. Мы имеем

$$L(v_k) = -\lambda_k v_k(X).$$

Умножая обе части на $v_k(X)$, интегрируя по области Ω и принимая во внимание (60), получим

$$\lambda_k = -\int\limits_{\Omega} v_k(X) L(v_k)\, dX =$$

$$= -\int\limits_{\Omega} v_k(X) \left[\sum_{i,\, j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(X) \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \right) - a(X) v_k(X) \right] dX$$

или, интегрируя первую сумму по частям, будем иметь

$$\lambda_k = \int\limits_{\Omega} \left[\sum_{i,\, j=1}^{n} a_{ij}(X) \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v_k}{\partial x_j} + a(X) v_k^2(X) \right] dX.$$

Интеграл по границе S области Ω равен нулю, так как $v_k(X)\big|_{S=0}$. В силу условия (53),

$$\lambda_k \geqslant \int\limits_{\Omega} \left[\alpha \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)^2 + a(X) v_k^2(X) \right] dX,$$

откуда следует, что все собственные числа задачи (58), (59) положительны.

При $\lambda = \lambda_k$ уравнение (57) имеет решение в виде

$$T_k(t) = A_k \cos \sqrt{\lambda_k} t + B_k \sin \sqrt{\lambda_k} t,$$

где A_k и B_k — произвольные постоянные.

Таким образом, согласно (56), каждая функция

$$u_k(X,\, t) = v_k(X) T_k(t) = (A_k \cos \sqrt{\lambda_k} t + B_k \sin \sqrt{\lambda_k} t) v_k(X)$$

будет решением уравнения (52), удовлетворяющим граничному условию (55).

Составим ряд

$$u(X,\, t) = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos \sqrt{\lambda_k} t + B_k \sin \sqrt{\lambda_k} t) v_k(X). \tag{62}$$

Удовлетворяя начальным условиям (54), получим

$$\varphi_0(X)=\sum_{k=1}^{\infty} A_k v_k(X),\quad \varphi_1(X)=\sum_{k=1}^{\infty} B_k \sqrt{\lambda_k}\, v_k(X).$$

Отсюда легко находим

$$A_k=\int_{\Omega}\varphi_0(X)\,v_k(X)\,dX,\quad B_k=\frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}\int_{\Omega}\varphi_1(X)\,v_k(X)\,dX.$$

Подставив найденные значения коэффициентов A_k и B_k в ряд (62), мы, очевидно, получим решение задачи (52), (54) и (55), если ряд (62) и ряды, полученные из него двукратным почленным дифференцированием по x_i и t, равномерно сходятся.

ЗАДАЧИ

1. Однородная квадратная мембрана, имеющая в начальный момент $t=0$ форму $Axy(b-x)(b-y)$, где $A>0$ достаточно малое число, начала колебаться без начальной скорости. Исследовать свободные колебания мембраны, закрепленной по контуру.

Ответ:

$$u(x,y,t)=\frac{64Ab^4}{\pi^6}\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{\sin\frac{(2n+1)\pi x}{b}\sin\frac{(2m+1)\pi y}{b}}{(2n+1)^3(2m+1)^3}\times$$
$$\times\cos\sqrt{(2n+1)^2+(2m+1)^2}\,\frac{a\pi t}{b}.$$

2. Однородная прямоугольная мембрана $0\leqslant x\leqslant l$, $0\leqslant y\leqslant m$, закрепленная по контуру, в начальный момент времени $t=0$ получает удар в окрестности центральной точки, так что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\iint_{\sigma_\varepsilon} v_0\,dx\,dy=A,$$

где v_0 — начальная скорость, A — постоянная. Определить свободные колебания мембраны.

Ответ:

$$u(x,y,t)=\frac{4A}{a\pi ml}\sum_{k,\nu=1}^{\infty}\frac{\psi_{k\nu}\left(\frac{l}{2},\frac{m}{2}\right)}{\mu_{k\nu}}\psi_{k\nu}(x,y)\sin\mu_{k\nu}\pi a t,$$

где

$$\psi_{k\nu}(x,y)=\sin\frac{k\pi x}{l}\sin\frac{\nu\pi y}{m},\quad \mu_{k\nu}=\sqrt{\left(\frac{k}{l}\right)^2+\left(\frac{\nu}{m}\right)^2}.$$

3. Найти собственные колебания однородной круглой мембраны радиуса R, закрепленной по контуру, если в начальный момент времени она представляет поверхность параболоида вращения, а начальные скорости равны нулю.

Ответ:

$$u(r,t)=8A\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right)}{\mu_n^3 J_1(\mu_n)}\cos\frac{a\mu_n t}{R}\quad (A=\mathrm{const}),$$

где $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots$ — положительные корни уравнения $J_0(\mu)=0$.

У к а з а н и е. Применить метод разделения переменных к интегрированию уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

при условиях:

$$u(0,\ t) \text{ равно конечной величине, } u(R,\ t)=0;$$

$$u(r,\ 0)=A\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right),\quad \frac{\partial u(r,\ 0)}{\partial t}=0.$$

При нахождении коэффициентов разложения использовать следующие формулы:

$$\int_0^x xJ_0(x)\,dx=xJ_1(x),$$

$$\int_0^x x^3J_0(x)\,dx=2x^2J_0(x)+(x^3-4x)\,J_1(x).$$

4. Круглая однородная мембрана радиуса R, закрепленная по контуру, находится в состоянии равновесия при натяжении T_0. В момент времени $t=0$ к поверхности мембраны приложена равномерно распределенная гармоническая сила $\rho A\sin\omega t$. Найти радиальные колебания мембраны.

Ответ:

$$u(r,\ t)=\frac{A}{\omega^2}\left[\frac{J_0\left(\frac{\omega r}{a}\right)}{J_0\left(\frac{\omega R}{a}\right)}-1\right]\sin\omega t-$$

$$-\frac{2A\omega R^3}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{\mu_n at}{R}\,J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right)}{\mu_n^2(\omega^2R-a^2\mu_n^2)\,J_0'(\mu_n)},$$

где $\mu_1,\ \mu_2,\ \mu_3,\ \ldots$ — положительные корни уравнения $J_0(\mu)=0$.