ЧАСТЬ ВТОРАЯ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

Глава XVIII

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ФОРМУЛЫ, ПРИМЕНЯЕМЫЕ В ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

§ 1. Определения и обозначения

Интегральные соотношения, которым посвящена эта глава, находят широкое применение в математической физике, особенно в теории уравнений эллиптического типа, изучение которых будет начато в следующей главе.

Начнем с рассмотрения системы обозначений, более удобной в последующем изложении, чем принятая выше. Ранее декартовы координаты точек пространства обозначались через x, y, z, а сами эти точки — большими буквами латинского алфавита. Ниже будем часто применять другую систему обозначений, в которой точки пространства обозначаются малыми буквами, например, x, ξ и т. д., а их координаты этими же буквами с индексами 1, 2, 3. Например, через x_1, x_2, x_3 обозначаются координаты точки x, через ξ_1, ξ_2, ξ_3 — координаты точки ξ и т. д. Оси координат будем называть соответственно осями 1, 2, 3. Через $|x|$, $|\xi|$ и т. д. будем обозначать расстояние точек x, ξ и т. д. от начала координат, а через $|x-\xi|$, $|y-\eta|$ и т. д. — расстояние между точками x и ξ, y и η и т. д. Если из текста ясно, о каких точках идет речь, то расстояние между ними будет обозначаться через r.

Соотношения, которые ниже будут рассматриваться, включают интегралы, взятые по некоторым объемам, поверхностям или линиям.

Вполне строгое определение понятия поверхности и линии дается топологией и представляет значительные трудности. Как и выше, мы будем опираться, в основном, на интуитивное представление об этих понятиях. Линию, например, можно представить как образ, получающийся при движении точки, поверхность — как образ, получающийся при движении линии, или как границу тела.

Областью, соответственно *трехмерной* или *двумерной*, будем называть часть пространства или поверхности, удовлетворяющую следующим условиям:

а) любые две точки области могут быть соединены линией, все точки которой принадлежат области (связность);

б) каждой точке x области можно сопоставить число $\eta = \eta(x)$ такое, что все точки пространства (поверхности), отстоящие от x менее, чем на η, также принадлежат области.

Область на плоскости будем называть *плоской*.

Множество точек пространства (поверхности), на сколь угодно малом расстоянии от которых находятся точки пространства (поверхности) как принадлежащие, так и не принадлежащие области, называют *границей области*. Отметим, что точки границы области не принадлежат области.

Совокупность точек области и ее границы называют *замкнутой областью*. Точки замкнутой области, не принадлежащие ее границе, называют *внутренними*.

Границы областей всегда будем считать поверхностями (линиями). Граница может включать несколько замкнутых поверхностей (линий). Например, граница шара с вырезанным из его внутренней части шаром меньшего радиуса состоит из двух сферических поверхностей.

В отношении свойств границ мы будем делать определенные предположения, которые придадут четкий смысл всем используемым соотношениям. Если не сделано оговорок, границы областей будем считать *кусочно-гладкими*. Это значит, что, например, на границе трехмерной области повсюду, за исключением, быть может, некоторого конечного числа линий конечной длины, существует единственная нормаль (единственная касательная плоскость) с направляющими косинусами, представляющими непрерывные функции точки границы. Границы двумерных областей ниже будут интересовать нас только тогда, когда эти области плоские. В этом случае для характеристики локальных свойств границы также достаточно рассматривать только нормаль к границе и ее два направляющих косинуса. На кусочно-гладкой границе плоской области направляющие косинусы нормали непрерывны, а нормаль единственна всюду, за исключением, быть может, некоторого конечного числа точек.

В тех случаях, когда рассматривается линия, аналогом области (одномерная область) является часть линии, не разделенная точками, не принадлежащими этой части, и состоящая только из внутренних точек (например, отрезок прямой без его концов). Границей такой одномерной области являются две точки на ее концах, которые рассматриваются как не принадлежащие области (например, концы отрезка).

Рассматривая границы трехмерных областей, иногда будем также предполагать, что в каждой точке x границы можно ввести такую местную систему декартовых координат с началом в точке x, чтобы часть границы, лежащую внутри некоторого шара с центром в точке x, можно было представить уравнением

$$\xi_3 = f(\xi_1, \xi_2),$$

где функция $f(\xi_1, \xi_2)$ и ее производные первого порядка непрерывны и обращаются в точке x в нуль. В гл. XIX, § 6, мы увидим, что при этом условии граница является гладкой.

Окрестностью какой-либо *точки* называют всякую область, содержащую эту точку. В зависимости от характера изучаемой задачи, можно рассматривать окрестности разного числа измерений, являющихся частью пространства, поверхности или линии.

Если все точки области принадлежат ограниченной части пространства (например, могут быть заключены в шаре конечного радиуса), то эту область называют *ограниченной* или *конечной*. В противном случае область называют *бесконечной*. Точки пространства, не принадлежащие некоторой замкнутой поверхности S, образуют две области, одна из которых конечна, а другая — бесконечна. О бесконечной области говорят, что она расположена *вне* S, а о конечной, что она расположена *внутри* S. Поверхность S является общей границей этих областей. Нормаль к поверхности S, направленную в сторону бесконечной области (вовне S), называют *внешней нормалью к границе конечной области*. Нормаль к S противоположного направления соответственно называют *внешней нормалью к границе бесконечной области*. Ниже мы всегда будем пользоваться только внешней нормалью к области.

Плоскость делит пространство на две бесконечных области, каждую из которых называют *полупространством*. Аналогично, прямая делит плоскость на две бесконечных плоских области (*полуплоскости*).

Мы будем пользоваться следующими обозначениями:

V, S, L — замкнутые области соответственно трех, двух и одного измерения;

dV, dS, dL — меры (объем, площадь, длина) бесконечно малых элементов соответствующих областей*;

$\mathcal{F}V$, $\mathcal{F}S$, $\mathcal{F}L$ — границы соответствующих областей.

Когда это не может вызвать недоразумений, для краткости будем говорить просто «область V» вместо «замкнутая область V»

* О понятиях меры, кратного интегрирования и др. см. В. И. Смирнов [1], т. II, п. 88.

и т. д. Чтобы указать принадлежность точки той или иной области или границе, будем применять символ $\in$. Например, выражения

$$x \in V, \quad x \in V - \mathcal{F}V, \quad x \in \mathcal{F}V$$

будут соответственно означать, что x — точка области V, x — внутренняя точка области V; x — точка границы области V.

§ 2. Формулы Остроградского — Гаусса и Грина

Пусть $A_i(x)$, $i = 1, 2, 3$, — функции, имеющие в области V непрерывные первые производные. Представим интеграл по области V от производной $\frac{\partial A_1}{\partial x_1}$ в виде повторного интеграла:

$$\iiint\limits_V \frac{\partial A_1}{\partial x_1} dV = \iint\limits_\sigma dx_2 dx_3 \int\limits_{l(x_2,\ x_3)} \frac{\partial A_1}{\partial x_1} dx_1,$$

где σ — область на плоскости осей 2, 3, образованная проекциями точек границы $\mathcal{F}V$ области V, а $l(x_2, x_3)$ — совокупность лежащих в области V отрезков прямой, проходящей параллельно оси 1 через точку с координатами x_2, x_3 на σ. Линейный интеграл от $\frac{\partial A_1}{\partial x_1}$ вдоль какого-либо отрезка совокупности $l(x_2, x_3)$ равен разности значений A_1 на концах отрезка, соответствующих верхнему и нижнему пределам интегрирования.

Заметим теперь, что поверхность $\mathcal{F}V$ может быть разбита на три части: S_1 и S_2, образованные концами отрезков совокупностей $l(x_2, x_3)$, отвечающими соответственно нижним и верхним пределам интегрирования (точки входа в область V и выхода из нее прямых, параллельных оси 1) и S_3, образованную точками, принадлежащими параллельным оси 1 касательным к $\mathcal{F}V$ и не являющимися концами рассматриваемых отрезков. Обозначим через (n_x, x_1) угол между осью 1 и внешней нормалью n_x к $\mathcal{F}V$ в точке $x \in \mathcal{F}V$ и введем функцию $\operatorname{sign} q$*, равную 1, если $q > 0$, -1, если $q < 0$ и 0, если $q = 0$. Легко видеть, что

$$\operatorname{sign}\cos(n_x, x_1) = \begin{cases} -1, & \text{если } x \in S_1, \\ 1, & \text{если } x \in S_2, \\ 0, & \text{если } x \in S_3. \end{cases}$$

Рассмотрим теперь подынтегральное выражение в интеграле по σ. После интегрирования по $l(x_2, x_3)$ оно примет вид суммы, каждый член которой вычисляется через значение функции A_1 на границе $\mathcal{F}V$, именно равен $A_1(x) \operatorname{sign}\cos(n_x, x_1)$, а общее число чле-

* Символ sign, являющийся сокращением латинского слова signum (знак), читается «сигнум».