и т. д. Чтобы указать принадлежность точки той или иной области или границе, будем применять символ $\in$. Например, выражения

$$x \in V, \quad x \in V - \mathcal{F}V, \quad x \in \mathcal{F}V$$

будут соответственно означать, что x — точка области V, x — внутренняя точка области V; x — точка границы области V.

§ 2. Формулы Остроградского — Гаусса и Грина

Пусть $A_i(x)$, $i=1, 2, 3$, — функции, имеющие в области V непрерывные первые производные. Представим интеграл по области V от производной $\frac{\partial A_1}{\partial x_1}$ в виде повторного интеграла:

$$\iiint_V \frac{\partial A_1}{\partial x_1} dV = \iint_\sigma dx_2 dx_3 \int_{l(x_2,\, x_3)} \frac{\partial A_1}{\partial x_1} dx_1,$$

где σ — область на плоскости осей 2, 3, образованная проекциями точек границы $\mathcal{F}V$ области V, а $l(x_2, x_3)$ — совокупность лежащих в области V отрезков прямой, проходящей параллельно оси 1 через точку с координатами x_2, x_3 на σ. Линейный интеграл от $\frac{\partial A_1}{\partial x_1}$ вдоль какого-либо отрезка совокупности $l(x_2, x_3)$ равен разности значений A_1 на концах отрезка, соответствующих верхнему и нижнему пределам интегрирования.

Заметим теперь, что поверхность $\mathcal{F}V$ может быть разбита на три части: S_1 и S_2, образованные концами отрезков совокупностей $l(x_2, x_3)$, отвечающими соответственно нижним и верхним пределам интегрирования (точки входа в область V и выхода из нее прямых, параллельных оси 1) и S_3, образованную точками, принадлежащими параллельным оси 1 касательным к $\mathcal{F}V$ и не являющимися концами рассматриваемых отрезков. Обозначим через (n_x, x_1) угол между осью 1 и внешней нормалью n_x к $\mathcal{F}V$ в точке $x \in \mathcal{F}V$ и введем функцию $\operatorname{sign} q$*, равную 1, если $q > 0$, -1, если $q < 0$ и 0, если $q = 0$. Легко видеть, что

$$\operatorname{sign}\cos(n_x, x_1) = \begin{cases} -1, & \text{если } x \in S_1, \\ 1, & \text{если } x \in S_2, \\ 0, & \text{если } x \in S_3. \end{cases}$$

Рассмотрим теперь подынтегральное выражение в интеграле по σ. После интегрирования по $l(x_2, x_3)$ оно примет вид суммы, каждый член которой вычисляется через значение функции A_1 на границе $\mathcal{F}V$, именно равен $A_1(x)\operatorname{sign}\cos(n_x, x_1)$, а общее число чле-

* Символ sign, являющийся сокращением латинского слова signum (знак), читается «сигнум».

8*

нов равно числу пересечений соответствующей прямой, параллельной оси 1, с границей $\mathcal{F}V$. Таким образом, каждой точке x на S_1 и S_2 оказывается сопоставленной величина $A_1(x)\operatorname{sign}\cos(n_x, x_1)$, совокупность значений которой на S_1 и S_2 позволяет полностью определить рассматриваемое подынтегральное выражение. Это дает возможность от интегрирования по σ перейти к интегрированию по поверхности $\mathcal{F}V$. Для этого заметим, что

$$dx_2 dx_3 = dS(x)\,|\cos(n_x, x_1)| = dS(x)\cos(n_x, x_1)\operatorname{sign}\cos(n_x, x_1),$$

где $dS(x)$ — бесконечно малая окрестность точки $x \in \mathcal{F}V$ на границе $\mathcal{F}V$ (элемент $\mathcal{F}V$). Произведя соответствующую замену и распространив интегрирование на все точки $x \in S_1 + S_2$, получим

$$\iint_{\sigma} dx_2 dx_3 \int_{l(x_2,\, x_3)} \frac{\partial A_1}{\partial x_1} dx_1 =$$

$$= \iint_{S_1 + S_2} A_1 \operatorname{sign}\cos(n_x, x_1)\,|\cos(n_x, x_1)|\,dS(x) = \iint_{S_1 + S_2} A_1 \cos(n, x_1)\,dS.$$

Для сокращения письма аргумент x в подынтегральном выражении опущен. Но интегрирование можно распространить также и на S_3, так как там $\cos(n, x_1) = 0$. Следовательно,

$$\iiint_V \frac{\partial A_1}{\partial x_1} dx_1 = \iint_{\mathcal{F}V} A_1 \cos(n, x_1)\,dS.$$

Заменяя индекс 1 на индексы 2 и 3, получим аналогичные соотношения и для функций A_2 и A_3. Складывая все эти соотношения придем к *формуле Остроградского — Гаусса*:

$$\iiint_V \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\alpha} dV = \iint_{\mathcal{F}V} \sum_{\alpha=1}^{3} A_\alpha \cos(n, x_\alpha)\,dS. \qquad (1)$$

При выводе формулы Остроградского — Гаусса мы не принимали во внимание, что на отдельных линиях поверхности $\mathcal{F}V$ нормаль может не существовать. Это является правомерным, так как мера (площадь) множества точек, принадлежащих этим линиям, очевидно, равна нулю, вследствие чего исключение этих точек не отражается на значении предела, к которому стремятся интегральные суммы. При желании, вывод формулы (1) можно провести разбивая область V на такие подобласти, чтобы в каждой из них интегрирование осуществлялось только по гладкой части их границ. Сложив результаты, снова придем к формуле для всей области V.

Формулу Остроградского — Гаусса мы прежде всего применим для вывода формул Грина, играющих важную роль в математической физике.

Рассмотрим линейное дифференциальное выражение второго порядка

$$\mathcal{M}u = \sum_{\alpha,\ \beta=1}^{3} a_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \sum_{\alpha=1}^{3} b_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + cu, \tag{2}$$

где $a_{\alpha\beta}$, b_α, c — некоторые функции точки x. Если функции $a_{\alpha\beta}$, а также функции

$$e_\alpha \equiv b_\alpha - \sum_{\beta=1}^{3} \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta}, \tag{3}$$

имеют непрерывные первые производные, то дифференциальному выражению $\mathcal{M}u$ можно придать вид

$$\mathcal{M}u = \sum_{\alpha,\ \beta=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} a_{\alpha\beta} \frac{\partial u}{\partial x_\beta} + \sum_{\alpha=1}^{3} e_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + cu. \tag{4}$$

Дифференциальное выражение

$$\mathcal{N}u \equiv \sum_{\alpha,\ \beta=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} a_{\alpha\beta} \frac{\partial u}{\partial x_\beta} - \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial (e_\alpha u)}{\partial x_\alpha} + cu \tag{5}$$

в этом случае называется *сопряженным* дифференциальному выражению $\mathcal{M}u$. Представив выражение $\mathcal{N}u$ в форме

$$\mathcal{N}u = \sum_{\alpha\ \beta=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} a_{\alpha\beta} \frac{\partial u}{\partial x_\beta} - \sum_{\alpha=1}^{3} e_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + \left(c - \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial e_\alpha}{\partial x_\alpha}\right) u$$

легко видеть, что *свойство сопряженности взаимно*, т. е. выражение $\mathcal{M}u$ является сопряженным $\mathcal{N}u$.

Если $\mathcal{M}u = \mathcal{N}u$, то дифференциальное выражение $\mathcal{M}u$ называется *самосопряженным*. Чтобы дифференциальное выражение $\mathcal{M}u$ было самосопряженным, необходимо и достаточно соблюдение равенств:

$$e_\alpha \equiv b_\alpha - \sum_{\beta=1}^{3} \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} = 0 \quad (\alpha = 1,\ 2,\ 3).$$

Составим дифференциальное выражение

$$v\mathcal{M}u - u\mathcal{N}v = \sum_{\alpha,\ \beta=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_\beta} a_{\alpha\beta} \left(v \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} - u \frac{\partial v}{\partial x_\alpha}\right) + \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} e_\alpha uv.$$

Если u и v — *функции, непрерывные вместе со своими первыми и вторыми производными в области* V, то, интегрируя это выражение по V и применяя формулу Остроградского — Гаусса, получим *формулу Грина:*

$$\iiint\limits_V (v\mathcal{M}u-u\mathcal{N}v)\,dV=\iint\limits_{\mathcal{F}V}\left[\sum_{\alpha,\,\beta=1}^{3} n_\beta a_{\alpha\beta}\left(v\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}-u\frac{\partial v}{\partial x_\alpha}\right)+\sum_{\alpha=1}^{3} e_\alpha n_\alpha uv\right]dS. \tag{6}$$

Формула Грина справедлива также тогда, когда функции u и v имеют интегрируемые производные второго порядка, непрерывные *только внутри* области V.

Важным является частный вид формулы Грина, когда

$$\mathcal{M}u=\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}+cu.$$

Это дифференциальное выражение самосопряженное, так что $\mathcal{N}u=\mathcal{M}u$. Выражение

$$\sum_{\alpha,\,\beta=1}^{3} n_\beta a_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}=\sum_{\beta=1}^{3} n_\beta\frac{\partial}{\partial x_\beta}\equiv\frac{d}{dn}$$

в рассматриваемом случае представляет оператор дифференцирования по направлению внешней нормали n к $\mathcal{F}V$, вследствие чего формула Грина принимает вид

$$\iiint\limits_V (v\,\Delta u-u\,\Delta v)\,dV=\iint\limits_{\mathcal{F}V}\left(v\frac{du}{dn}-u\frac{dv}{dn}\right)dS, \tag{7}$$

где через Δ обозначен *оператор Лапласа:* $\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$.

Если S — плоская область, то справедлива формула:

$$\iint\limits_S (v\mathcal{M}u-u\mathcal{N}v)\,dS=$$

$$=\int\limits_{\mathcal{F}S}\left[\sum_{\alpha,\,\beta=1}^{2} n_\beta a_{\alpha\beta}\left(v\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}-u\frac{\partial v}{\partial x_\alpha}\right)+\sum_{\alpha=1}^{2} e_\alpha n_\alpha uv\right]dL. \tag{8}$$

Она аналогична формуле (6) и ее также называют *формулой Грина*. Когда $\mathcal{M}=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$, она принимает вид

$$\iint\limits_S (v\,\Delta u-u\,\Delta v)\,dS=\int\limits_{\mathcal{F}S}\left(v\frac{du}{dn}-u\frac{dv}{dn}\right)dL, \tag{9}$$

где $\frac{d}{dn}$ — оператор дифференцирования по направлению внешней нормали к границе $\mathcal{F}S$ области S.