ЗАДАЧА

Вывести формулу Грина (9) для плоской области.

§ 3*. Преобразование формулы Грина*

Формулу Грина (6) можно преобразовать к более простому виду. Для этого каждой точке границы $\mathcal{F}V$ сопоставим проходящую через эту точку прямую с направляющими косинусами

$$\nu_i = \frac{1}{a} \sum_{\beta=1}^{3} a_{i\beta} n_\beta, \tag{10}$$

где

$$a = \left[\sum_{\alpha=1}^{3} \left(\sum_{\beta=1}^{3} a_{\alpha\beta} n_\beta \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \tag{11}$$

Эту прямую будем называть *конормалью*. Заметив, что

$$\sum_{\alpha,\,\beta=1}^{3} n_\beta a_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} = a \sum_{\alpha=1}^{3} \nu_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \equiv a \frac{d}{d\nu}, \tag{12}$$

где $\frac{d}{d\nu}$ означает *дифференцирование по направлению конормали*, и обозначив

$$b \equiv \sum_{\alpha=1}^{3} e_\alpha n_\alpha$$

приведем формулу Грина (6) к виду

$$\iiint\limits_V (v\mathcal{M}u - u\mathcal{N}v)\,dV = \iint\limits_{\mathcal{F}V} \left[a \left(v \frac{du}{d\nu} - u \frac{dv}{d\nu} \right) + buv \right] dS. \tag{13}$$

Введя обозначения

$$\mathcal{P}u \equiv a \frac{du}{d\nu} + \beta u, \quad Qv \equiv a \frac{dv}{d\nu} + (\beta - b)\,v, \tag{14}$$

где β — *любая* непрерывная функция, можем привести формулу Грина также к виду

$$\iiint\limits_V (v\mathcal{M}u - u\mathcal{N}v)\,dV = \iint\limits_{\mathcal{F}V} (v\mathcal{P}u - uQv)\,dS. \tag{15}$$

В случае плоской области формулы (13) и (15) имеют вид:

$$\iint\limits_S (v\mathcal{M}u - u\mathcal{N}v)\,dS = \int\limits_{\mathcal{F}S} \left[a \left(v \frac{du}{d\nu} - u \frac{dv}{d\nu} \right) + buv \right] dL, \tag{16}$$

$$\iint\limits_S (v\mathcal{M}u - u\mathcal{N}v)\,dS = \int\limits_{\mathcal{F}S} (v\mathcal{P}u - uQv)\,dL, \tag{17}$$

где дифференцирование по направлению конормали определяется формулами, аналогичными формулам (10)—(12).

---

* § 3—6 этой главы используются только в дополнении к ч. II.