§ 4*. Функции Леви

В этом параграфе мы рассмотрим функции, играющие большую роль в теории эллиптических дифференциальных уравнений общего вида.

Предположим, что *дифференциальное выражение* (2) *принадлежит эллиптическому типу*, т. е. существует такое число $\varepsilon > 0$, что при условии

$$\sum_{\alpha=1}^{3} \lambda_\alpha^2 = 1$$

удовлетворяется неравенство

$$\sum_{\alpha,\ \beta=1}^{3} a_{\alpha\beta}\lambda_\alpha\lambda_\beta \geqslant \varepsilon. \tag{18}$$

В силу этого неравенства определитель

$$A(x) \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

составленный из коэффициентов $a_{ij} = a_{ji}$ не обращается в нуль. Обозначим через $\tilde{a}_{ji}$ алгебраическое дополнение элемента a_{ij}, разделенное на значение определителя A. По известному свойству определителя

$$\sum_{\alpha=1}^{3} a_{i\alpha}\tilde{a}_{\alpha j} = \delta_{ij} \equiv \begin{cases} 1 \text{ при } i = j, \\ 0 \text{ при } i \neq j. \end{cases} \tag{19}$$

Кроме того, легко видеть, что из неравенства (18) вытекает неравенство

$$\sum_{\alpha,\ \beta=1}^{3} \tilde{a}_{\alpha\beta}\lambda_\alpha\lambda_\beta > 0. \tag{20}$$

Чтобы убедиться в этом, достаточно квадратичную форму в неравенстве (18) с помощью ортогонального преобразования привести к виду

$$c_{11}\mu_1^2 + c_{22}\mu_2^2 + c_{33}\mu_3^2;$$

при этом форма, фигурирующая в неравенстве (20), примет вид

$$c_{22}c_{33}\mu_1^2 + c_{11}c_{33}\mu_2^2 + c_{11}c_{22}\mu_3^2.$$

Поскольку, в силу неравенства (18), c_{11}, c_{22}, $c_{33} > 0$, то высказанное утверждение очевидно.

Обозначим через x и ξ две точки с координатами x_1, x_2, x_3 и ξ_1, ξ_2, ξ_3 соответственно и рассмотрим функцию

$$H(\xi,\ x) = \frac{1}{4\pi}\left[A(x) \sum_{\alpha\ \beta=1}^{3} \tilde{a}_{\alpha\beta}(x)(\xi_\alpha - x_\alpha)(\xi_\beta - x_\beta)\right]^{-\frac{1}{2}}. \tag{21}$$

При $x \neq \xi$

$$\sum_{\alpha,\ \beta=1}^{3} a_{\alpha\beta}(x) \frac{\partial^2 H}{\partial \xi_\alpha\, \partial \xi_\beta} = 0, \tag{22}$$

что предоставляется проверить читателю. Если коэффициенты $a_{ij} = 0$ при $i \neq j$, $a_{ij} = \frac{1}{2}$ при $i = j$, то

$$H(\xi,\ x) = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{r}, \tag{23}$$

где $r \equiv |\xi - x|$ — расстояние между точками x и ξ. В общем же случае во всякой ограниченной замкнутой области, содержащейся в области V, имеют место соотношения:

$$|H| < \frac{B}{r}, \quad \left|\frac{\partial H}{\partial \xi_i}\right| < \frac{B_1}{r^2}, \quad \left|\frac{\partial^2 H}{\partial \xi_i\, \partial \xi_j}\right| < \frac{B_2}{r^3}, \tag{24}$$

где $i,\ j = 1,\ 2,\ 3$, а B, B_1, B_2 — положительные числа. Доказательство этих соотношений проводится аналогично. Докажем, например, второе из них. Имеем

$$r^2 \frac{\partial H}{\partial \xi_i} = -\frac{1}{4\pi} [A(x)]^{-\frac{1}{2}} \frac{\sum\limits_{\alpha=1}^{3} \tilde{a}_{i\alpha}(\xi_\alpha - x_\alpha)}{\left[\sum\limits_{\alpha,\ \beta=1}^{3} \tilde{a}_{\alpha\beta}(\xi_\alpha - x_\alpha)(\xi_\beta - x_\beta)\right]^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= -\frac{1}{4\pi} [A(x)]^{-\frac{1}{2}} \frac{\sum\limits_{\alpha=1}^{3} \tilde{a}_{i\alpha}\mu_\alpha}{\left[\sum\limits_{\alpha,\ \beta=1}^{3} \tilde{a}_{\alpha\beta}\mu_\alpha\mu_\beta\right]^{\frac{3}{2}}},$$

где

$$\mu_i = \frac{\xi_i - x_i}{r}$$

— направляющие косинусы прямой, проходящей через точки x и ξ. Так как форма $\sum\limits_{\alpha,\ \beta=1}^{3} \tilde{a}_{\alpha\beta} r_\alpha r_\beta$ положительно определенная, то существует такое число $C^* > 0$, что

$$\sum_{\alpha,\ \beta=1}^{3} \tilde{a}_{\alpha\beta} r_\alpha r_\beta > C^*,$$

в силу чего

$$r^2 \left|\frac{\partial H}{\partial \xi_i}\right| < \frac{1}{4\pi} [A(x)]^{-\frac{1}{2}} \left|\sum_{\alpha=1}^{3} \tilde{a}_{i\alpha} r_\alpha\right| (C^*)^{-\frac{3}{2}}.$$

Правая часть этого неравенства ограничена. Ее наибольшее значение в рассматриваемой области примем за B_1. Поделив обе части неравенства на r, придем ко второму из неравенств (24).

Если $\varphi(\xi, x)$ — функция, при $\xi \neq x$ непрерывная в рассматриваемой области V вместе со своими первыми и вторыми производными по координатам точки ξ и равномерно в каждой замкнутой области, содержащейся в V, удовлетворяющая неравенствам:

$$|\varphi| < \left|\frac{C_1}{r^{1-\lambda}}, \quad \left|\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_i}\right| < \frac{C_2}{r^{2-\lambda}}, \quad \left|\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi_i\,\partial\xi_j}\right| < \frac{C_3}{r^{3-\lambda}}, \qquad (25)$$

где $i, j = 1, 2, 3$, а C_1, C_2, C_3 и λ — положительные числа, не зависящие от выбора точки x, то выражение

$$L(\xi, x) \equiv H(\xi, x) + \varphi(\xi, x) \qquad (26)$$

называют *функцией Леви*. Функция $H(\xi, x)$ является главной частью функций Леви.

§ 5*. Формула Грина — Стокса

Обозначим через $J(x, \rho)$ окрестность точки x, определенную неравенством

$$\sum_{\alpha, \beta=1}^{3} \tilde{a}_{\alpha\beta}(x)(\xi_\alpha - x_\alpha)(\xi_\beta - x_\beta) \leqslant \rho^2. \qquad (27)$$

Как известно из аналитической геометрии, такая окрестность представляет эллипсоид с объемом, равным

$$V_J = \frac{4}{3}\pi [A(x)]^{\frac{1}{2}} \rho^3. \qquad (28)$$

Пусть V — замкнутая область и x — ее внутренняя точка. Выберем ρ настолько малым, чтобы окрестность $J(x, \rho)$ целиком лежала внутри V. В области $V - J - \mathcal{F}V$ функция Леви $L(\xi, x)$ непрерывна вместе со своими первыми и вторыми производными. Следовательно, в области $V - J$ можно применить формулу Грина (15), положив в ней $v(\xi) = L(\xi, x)$. При этом получим

$$\iiint\limits_{V-J} (L\mathcal{M}_\xi u - u\mathcal{N}_\xi L)\, dV_\xi = \iint\limits_{\mathcal{F}V + \mathcal{F}J} (L\mathcal{P}_\xi u - uQ_\xi L)\, dS_\xi, \qquad (29)$$

где индексы ξ указывают, что дифференцирование и интегрирование проводятся по координатам точки ξ.

Имея в виду перейти в этом соотношении к пределу при $\rho \to 0$ и замечая, что в окрестности точки x подынтегральные выражения неограниченно возрастают, проведем их оценку.

Положив

$$L(\xi, x) = H(\xi, x) + \varphi(\xi, x)$$