Правая часть этого неравенства ограничена. Ее наибольшее значение в рассматриваемой области примем за B_1. Поделив обе части неравенства на r, придем ко второму из неравенств (24).

Если $\varphi(\xi, x)$ — функция, при $\xi \neq x$ непрерывная в рассматриваемой области V вместе со своими первыми и вторыми производными по координатам точки ξ и равномерно в каждой замкнутой области, содержащейся в V, удовлетворяющая неравенствам:

$$|\varphi| < \left|\frac{C_1}{r^{1-\lambda}}, \quad \left|\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_i}\right| < \frac{C_2}{r^{2-\lambda}}, \quad \left|\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi_i\,\partial\xi_j}\right| < \frac{C_3}{r^{3-\lambda}}, \tag{25}$$

где $i, j = 1, 2, 3$, а C_1, C_2, C_3 и λ — положительные числа, не зависящие от выбора точки x, то выражение

$$L(\xi, x) \equiv H(\xi, x) + \varphi(\xi, x) \tag{26}$$

называют *функцией Леви*. Функция $H(\xi, x)$ является главной частью функций Леви.

§ 5*. Формула Грина — Стокса

Обозначим через $J(x, \rho)$ окрестность точки x, определенную неравенством

$$\sum_{\alpha, \beta=1}^{3} \tilde{a}_{\alpha\beta}(x)(\xi_\alpha - x_\alpha)(\xi_\beta - x_\beta) \leqslant \rho^2. \tag{27}$$

Как известно из аналитической геометрии, такая окрестность представляет эллипсоид с объемом, равным

$$V_J = \frac{4}{3}\pi\,[A(x)]^{\frac{1}{2}}\rho^3. \tag{28}$$

Пусть V — замкнутая область и x — ее внутренняя точка. Выберем ρ настолько малым, чтобы окрестность $J(x, \rho)$ целиком лежала внутри V. В области $V - J - \mathcal{F}V$ функция Леви $L(\xi, x)$ непрерывна вместе со своими первыми и вторыми производными. Следовательно, в области $V - J$ можно применить формулу Грина (15), положив в ней $v(\xi) = L(\xi, x)$. При этом получим

$$\iiint\limits_{V-J} (L\mathcal{M}_\xi u - u\mathcal{N}_\xi L)\,dV_\xi = \iint\limits_{\mathcal{F}V + \mathcal{F}J} (L\mathcal{P}_\xi u - uQ_\xi L)\,dS_\xi, \tag{29}$$

где индексы ξ указывают, что дифференцирование и интегрирование проводятся по координатам точки ξ.

Имея в виду перейти в этом соотношении к пределу при $\rho \to 0$ и замечая, что в окрестности точки x подынтегральные выражения неограниченно возрастают, проведем их оценку.

Положив

$$L(\xi, x) = H(\xi, x) + \varphi(\xi, x)$$

и приняв во внимание соотношения (14), можем записать

$$L\mathscr{P}_\xi u - uQ_\xi L = -ua(\xi)\frac{dH}{d\nu} + \psi(\xi,\ x), \tag{30}$$

где

$$\psi(\xi,\ x) = -ua\frac{d\varphi}{d\nu} + [(c-b) + \mathscr{P}_\xi u](H+\varphi).$$

Так как функции u и $\mathscr{P}u$ ограничены, то из неравенств (24) и (25) следует неравенство:

$$|\psi(\xi,\ x)| < \frac{B^*}{r^{2-\lambda}} + \frac{B_1^*}{r^{1-\lambda}} + \frac{B_2^*}{r},$$

где λ, B^*, B_1^*, B_2^* — положительные постоянные. В достаточно малой окрестности точки x первый член в правой части этого неравенства становится подавляюще велик по сравнению с остальными. Поэтому существует такое число $\delta > 0$, что

$$|\psi(\xi,\ x)| < \frac{B^*}{r^{2-\lambda}} \quad \text{при} \quad r < \delta. \tag{31}$$

Рассмотрим теперь выражение $L\mathscr{M}u - u\mathscr{N}L$. Принимая во внимание соотношение (21), приведем его к виду

$$L\mathscr{M}_\xi u - u\mathscr{N}_\xi L = -u\sum_{\alpha,\ \beta=1}^{3} a_{\alpha\xi}(\xi)\frac{\partial^2 H}{\partial\xi_\alpha\,\partial\xi_\beta} + \psi_1(\xi,\ x), \tag{32}$$

где $\psi_1(\xi,\ x)$ — функция, не содержащая производных от функции $\varphi(\xi,\ x)$ по ξ_i выше второй и от функции $H(\xi,\ x)$ выше первой. Поэтому в достаточно малой окрестности точки x справедлива оценка

$$|\psi_1(\xi,\ x)| < \frac{C_1^*}{r^{3-\lambda}} \quad \text{при} \quad r < \delta_1,$$

где C_1^*, λ и δ_1 — положительные постоянные, не зависящие от выбора точки x. Далее, в силу тождества (22),

$$\sum_{\alpha,\ \beta=1}^{3} a_{\alpha\beta}(\xi)\frac{\partial^2 H}{\partial\xi_\alpha\,\partial\xi_\beta} = \sum_{\alpha,\ \beta=1}^{3}[a_{\alpha\beta}(\xi) - a_{\alpha\beta}(x)]\frac{\partial^2 H}{\partial\xi_\alpha\,\partial\xi_\beta}.$$

С точностью до малых высшего порядка по r:

$$a_{ij}(\xi) - a_{ij}(x) = \left.\frac{\partial a_{ij}}{\partial r}\right|_{\xi=x} r, \tag{33}$$

где через $\frac{\partial}{\partial r}$ обозначено дифференцирование по направлению прямой, соединяющей точки x и ξ. Так как производные функций $a_{ij}(\xi)$ по предположению непрерывны и, следовательно, ограничены, то в силу последнего из неравенств (24) при достаточно малых r имеет место оценка:

$$\left| \sum_{\alpha,\ \beta=1}^{3} a_{\alpha\beta}(\xi) \frac{\partial^2 H}{\partial \xi_\alpha \partial \xi_\beta} \right| < \frac{C_2^*}{r^2}, \quad C_2^* > 0.$$

Учитывая найденные оценки членов правой части соотношения (32), придем к заключению, что при достаточно малом $\delta^* > 0$ имеет место неравенство

$$|L\mathcal{M}u - u\mathcal{N}L| < \frac{C^*}{r^{3-\lambda}}, \quad \text{если } r < \delta^*, \tag{34}$$

где C^* и $\lambda < 1$ — положительные постоянные, не зависящие от выбора точки x.

Перейдем теперь в интегральном соотношении (29) к пределу при $\rho \to 0$. В силу неравенства (34), интеграл в левой части соотношения (29) сходится к конечному пределу

$$\iiint\limits_V (L\mathcal{M}_\xi u - u\mathcal{N}_\xi L)\, dV_\xi = \lim_{\rho \to 0} \iiint\limits_{V-J} (L\mathcal{M}_\xi u - u\mathcal{N}_\xi L)\, dV_\xi. \tag{35}$$

Далее, на основании соотношения (30), получим:

$$\iint\limits_{\mathcal{F}J} (L\mathcal{P}_\xi u - uQ_\xi L)\, dS_\xi = -\iint\limits_{\mathcal{F}J} ua(\xi) \frac{dH}{d\nu} dS_\xi + \iint\limits_{\mathcal{F}J} \psi(\xi,\ x)\, dS_\xi. \tag{36}$$

В силу оценки (31), второй из интегралов в правой части при $\rho \to 0$ стремится к нулю. Действительно,

$$\left| \iint\limits_{\mathcal{F}J} \psi(\xi,\ x)\, dS_\xi \right| \leqslant \iint\limits_{\mathcal{F}J} |\psi(\xi,\ x)|\, dS_\xi < B^* \iint\limits_{\mathcal{F}J} \frac{dS_\xi}{r^{2-\lambda}} < B^* \frac{S_J}{r_m^{2-\lambda}},$$

где S_J — площадь поверхности $\mathcal{F}J$, а r_m — наименьшее расстояние между точкой x и точками на $\mathcal{F}J$. При $\rho \to 0$ эллипсоид (27) уменьшается, оставаясь подобным себе, так как коэффициенты $\tilde{a}_{ij}(x)$ не зависят от ρ. Поэтому площадь его поверхности

$$S_J = \overline{B} r_m^2,$$

где число $\overline{B}$ не зависит от ρ. Таким образом,

$$\left| \iint\limits_{\mathcal{F}J} \psi(\xi,\ x)\, dS_\xi \right| < B^* \overline{B} r_m^\lambda.$$

При $\rho \to 0$ правая часть этого неравенства стремится к нулю, так как ρ и r_m обращаются в нуль одновременно. Это доказывает сделанное утверждение.

Перейдем к рассмотрению первого интеграла в правой части равенства (36). Согласно равенству (12):

$$\frac{dH}{d\nu} = \frac{1}{a(\xi)} \sum_{\alpha,\ \beta=1}^{3} n_\beta a_{\alpha\beta}(\xi) \frac{\partial H}{\partial \xi_\alpha},$$

где n_i $(i=1, 2, 3)$ — направляющие косинусы внешней нормали к границе $\mathcal{F}J$. Выписав явно выражения для производных $\frac{\partial H}{\partial \xi_i}$, и приняв во внимание, что на поверхности $\mathcal{F}J$

$$\sum_{\alpha, \beta=1}^{3} \tilde{a}_{\alpha\beta}(x)(\xi_\alpha - x_\alpha)(\xi_\beta - x_\beta) = \rho^2,$$

получим

$$-u(\xi)a(\xi)\frac{dH}{d\nu} = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{u(\xi)}{\sqrt{A(x)}} \cdot \frac{1}{\rho^3} \sum_{\alpha, \beta, \gamma=1}^{3} n_\beta a_{\alpha\beta}(\xi)\tilde{a}_{\alpha\gamma}(x)(\xi_\gamma - x_\gamma). \quad (37)$$

При малых r

$$u(\xi) = u(x) + \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{\xi=x} r = u(x) + O(r),$$

где через $O(r)$ обозначена совокупность членов, бесконечно малых одновременно с r. Далее, согласно (33) и (19), при малых r

$$\sum_{\alpha=1}^{3} a_{\alpha i}(\xi)\tilde{a}_{\alpha j}(x) = \sum_{\alpha=1}^{3} \left[a_{\alpha i}(x)\tilde{a}_{\alpha j}(x) + \left.\frac{\partial a_{\alpha i}}{\partial r}\right|_{\xi=x} r\tilde{a}_{\alpha j}(x)\right] = \delta_{ij} + O(r).$$

Произведя суммирование по значку α в сумме, входящей в равенство (37), и подставив выражение для $u(\xi)$, получим

$$-\iint_{\mathcal{F}J} u(\xi)a(\xi)\frac{dH}{d\nu}dS_\xi = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{u(x)}{\sqrt{A(x)}} \cdot \frac{1+O(r)}{\rho^3} \times$$

$$\times \iint_{\mathcal{F}J} \sum_{\beta=1}^{3} n_\beta(\xi_\beta - x_\beta)\, dS_\xi. \quad (38)$$

Сумма $\sum_{\beta=1}^{3} n_\beta(\xi_\beta - x_\beta)$, входящая в подынтегральное выражение, равна проекции $r\cos(r, n)$ отрезка r, проведенного из точки x в точку ξ, на внешнюю нормаль n к поверхности $\mathcal{F}J$ в точке ξ. Эта проекция отрицательна, так как внешняя нормаль к $\mathcal{F}J$, как границе области $V-J$, направлена вовне $V-J$, т. е. внутрь эллипсоида J (рис. 27) Далее отметим, что объем конуса построенного на элементе dS, как на основании, с вершиной в точке x, с точностью до малых высшего порядка равен $\frac{1}{3}r|\cos(n, r)|dS$.

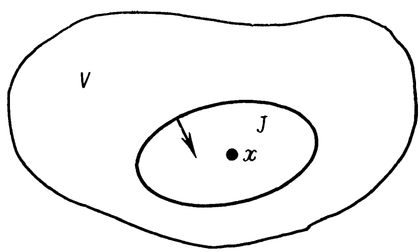

Рис. 27

Заметив, что суммирование всех таких конусов даст область $J(x, \rho)$, придем к заключению, что интеграл в правой части равенства (38) равен утроенному объему эллипсоида $J(x, \rho)$. Вследствие этого, учитывая выражение (28) и знак $\cos(r, n)$, получим

$$\iint_{\mathcal{F}J} \sum_{\beta=1}^{3} n_\beta (\xi_\beta - x_\beta)\, dS_\xi = -4\pi \sqrt{A(x)}\, \rho^3,$$

что, после подстановки в равенство (38), даст

$$\iint_{\mathcal{F}J} u(\xi)\, a(\xi) \frac{dH}{d\nu} dS_\xi = u(x)[1 + O(r)].$$

На основании произведенных оценок придем к заключению, что при $\rho \to 0$ выражение (36) стремится к пределу

$$\lim_{\rho \to 0} \iint_{\mathcal{F}J} (L\mathcal{P}_\xi u - uQ_\xi L)\, dS_\xi = -u(x).$$

Приняв во внимание найденные предельные зависимости и перейдя в интегральном соотношении (29) к пределу при $\rho \to 0$, получим *формулу Грина — Стокса*:

$$u(x) = \iint_{\mathcal{F}V} (L\mathcal{P}_\xi u - uQ_\xi L)\, dS_\xi - \iiint_{V} (L\mathcal{M}_\xi u - u\mathcal{N}_\xi L)\, dV_\xi. \quad (39)$$

Когда $\mathcal{M}_\xi u = \Delta u \equiv \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_\alpha^2}$ $\left(\text{т. е. при } a_{ij} = 0 \text{ для } i \neq j,\ a_{ij} = \frac{1}{2}\right.$ $\left.\text{для } i = j\right)$, формула Грина — Стокса приобретет вид:

$$u(x) = \iint_{\mathcal{F}V} \left(L \frac{du}{dn} - u \frac{dL}{dn}\right) dS - \iiint_{V} (L\Delta u - u\Delta L)\, dV, \quad (40)$$

где

$$L = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{r} + \varphi(\xi, x). \quad (41)$$

ЗАДАЧА

Предположив, что функция u в конечной области с границей S удовлетворяет уравнению $\Delta u = 0$, вывести формулу

$$u(x) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S} \left[\frac{1}{r} \frac{du}{dn} - u \frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right)\right] dS.$$

§ 6*. Формула Грина — Стокса в случае двух измерений

Построение функций Леви и вывод формулы Грина — Стокса на плоскости производятся почти так же, как и для случая пространства. Рассмотрим функцию

$$H(\xi, x) = \frac{1}{2\pi} [A(x)]^{-\frac{1}{2}} \ln \left[\sum_{\alpha, \beta=1}^{2} \tilde{a}_{\alpha\beta}(x)(\xi_\alpha - x_\alpha)(\xi_\beta - x_\beta)\right]^{-\frac{1}{2}},$$