учитывая выражение (28) и знак $\cos(r,\ n)$, получим

$$\iint\limits_{\mathcal{F}J} \sum_{\beta=1}^{3} n_\beta (\xi_\beta - x_\beta)\, dS_\xi = -4\pi \sqrt{A(x)}\, \rho^3,$$

что, после подстановки в равенство (38), даст

$$\iint\limits_{\mathcal{F}J} u(\xi)\, a(\xi) \frac{dH}{d\nu}\, dS_\xi = u(x)\,[1 + O(r)].$$

На основании произведенных оценок придем к заключению, что при $\rho \longrightarrow 0$ выражение (36) стремится к пределу

$$\lim_{\rho \to 0} \iint\limits_{\mathcal{F}J} (L\mathcal{P}_\xi u - uQ_\xi L)\, dS_\xi = -u(x).$$

Приняв во внимание найденные предельные зависимости и перейдя в интегральном соотношении (29) к пределу при $\rho \longrightarrow 0$, получим *формулу Грина—Стокса*:

$$u(x) = \iint\limits_{\mathcal{F}V} (L\mathcal{P}_\xi u - uQ_\xi L)\, dS_\xi - \iiint\limits_{V} (L\mathcal{M}_\xi u - u\mathcal{N}_\xi L)\, dV_\xi. \tag{39}$$

Когда $\mathcal{M}_\xi u = \Delta u \equiv \sum\limits_{\alpha=1}^{3} \dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi_\alpha^2}$ $\Big($т. е. при $a_{ij} = 0$ для $i \neq j$, $a_{ij} = \dfrac{1}{2}$ для $i = j\Big)$, формула Грина—Стокса приобретет вид:

$$u(x) = \iint\limits_{\mathcal{F}V} \left(L \frac{du}{dn} - u \frac{dL}{dn}\right) dS - \iiint\limits_{V} (L\Delta u - u\Delta L)\, dV, \tag{40}$$

где

$$L = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{r} + \varphi(\xi,\ x). \tag{41}$$

ЗАДАЧА

Предположив, что функция u в конечной области с границей S удовлетворяет уравнению $\Delta u = 0$, вывести формулу

$$u(x) = \frac{1}{4\pi} \iint\limits_{S} \left[\frac{1}{r} \frac{du}{dn} - u \frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right)\right] dS.$$

§ 6*. Формула Грина—Стокса в случае двух измерений

Построение функций Леви и вывод формулы Грина—Стокса на плоскости производятся почти так же, как и для случая пространства. Рассмотрим функцию

$$H(\xi,\ x) = \frac{1}{2\pi} [A(x)]^{-\frac{1}{2}} \ln \left[\sum_{\alpha,\ \beta=1}^{2} \tilde{a}_{\alpha\beta}(x)(\xi_\alpha - x_\alpha)(\xi_\beta - x_\beta)\right]^{-\frac{1}{2}},$$

определенную в замкнутой ограниченной плоской области S. Обозначения в правой части здесь аналогичны обозначениям § 4. Справедливо тождество

$$\sum_{\alpha, \beta=1}^{2} a_{\alpha\beta}(x) \frac{\partial^2 H}{\partial \xi_\alpha \, \partial \xi_\beta} = 0$$

и в любой замкнутой области, содержащейся в S, имеют место неравенства

$$|H| < B \left| \ln \frac{1}{r} \right|, \qquad \left| \frac{\partial H}{\partial \xi_i} \right| < \frac{B_1}{r}, \qquad \left| \frac{\partial^2 H}{\partial \xi_i \, \partial \xi_j} \right| < \frac{B_2}{r^2},$$

где $i, j = 1, 2$, а B, B_1 и B_2 — положительные числа, не зависящие от выбора точки x.

Функцию вида

$$L(\xi, x) = H(\xi, x) + \varphi(\xi, x)$$

назовем *функцией Леви*, если функция $\varphi(\xi, x)$ ограничена в рассматриваемой области, при $\xi \neq x$ непрерывна вместе со своими первыми и вторыми производными по координатам точки ξ, и в любой замкнутой области, содержащейся в S, удовлетворяет неравенствам

$$\left| \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_i} \right| < \frac{C_1}{r^{1-\lambda}}, \qquad \left| \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi_i \, \partial \xi_j} \right| < \frac{C_2}{r^{2-\lambda}},$$

где $i, j = 1, 2$, а λ, C_1 и C_2 — положительные числа, не зависящие от выбора точки x.

При указанном определении функций Леви на плоскости, справедлива *формула Грина — Стокса*:

$$u(x) = \int\limits_{\mathcal{F}S} (L \mathcal{P}_\xi u - u Q_\xi L) \, dS_\xi - \iint\limits_{S} (L \mathcal{M}_\xi u - u \mathcal{N}_\xi L) \, dS_\xi, \qquad (42)$$

где S — плоская область.

ЗАДАЧА

Предположив, что функция u в ограниченной плоской области с границей L удовлетворяет уравнению $\Delta u = 0$, вывести формулу

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{L} \left(\frac{du}{dn} \ln \frac{1}{r} - u \frac{d}{dn} \ln \frac{1}{r} \right) dL_\xi.$$

§ 7. Представление некоторых дифференциальных выражений в ортогональных системах координат

В ряд интегральных формул математической физики входят дифференциальные выражения, которые выше мы записывали в ортогональных декартовых координатах. Например, в формуле