определенную в замкнутой ограниченной плоской области S. Обозначения в правой части здесь аналогичны обозначениям § 4. Справедливо тождество

$$\sum_{\alpha, \beta=1}^{2} a_{\alpha\beta}(x) \frac{\partial^2 H}{\partial \xi_\alpha \, \partial \xi_\beta} = 0$$

и в любой замкнутой области, содержащейся в S, имеют место неравенства

$$|H| < B \left| \ln \frac{1}{r} \right|, \quad \left| \frac{\partial H}{\partial \xi_i} \right| < \frac{B_1}{r}, \quad \left| \frac{\partial^2 H}{\partial \xi_i \, \partial \xi_j} \right| < \frac{B_2}{r^2},$$

где $i, j = 1, 2$, а B, B_1 и B_2 — положительные числа, не зависящие от выбора точки x.

Функцию вида

$$L(\xi, x) = H(\xi, x) + \varphi(\xi, x)$$

назовем *функцией Леви*, если функция $\varphi(\xi, x)$ ограничена в рассматриваемой области, при $\xi \neq x$ непрерывна вместе со своими первыми и вторыми производными по координатам точки ξ, и в любой замкнутой области, содержащейся в S, удовлетворяет неравенствам

$$\left| \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_i} \right| < \frac{C_1}{r^{1-\lambda}}, \quad \left| \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi_i \, \partial \xi_j} \right| < \frac{C_2}{r^{2-\lambda}},$$

где $i, j = 1, 2$, а λ, C_1 и C_2 — положительные числа, не зависящие от выбора точки x.

При указанном определении функций Леви на плоскости, справедлива *формула Грина — Стокса*:

$$u(x) = \int_{\mathcal{F}S} (L\mathcal{P}_\xi u - uQ_\xi L)\, dS_\xi - \iint_S (L\mathcal{M}_\xi u - u\mathcal{N}_\xi L)\, dS_\xi, \tag{42}$$

где S — плоская область.

ЗАДАЧА

Предположив, что функция u в ограниченной плоской области с границей L удовлетворяет уравнению $\Delta u = 0$, вывести формулу

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_L \left(\frac{du}{dn} \ln \frac{1}{r} - u \frac{d}{dn} \ln \frac{1}{r} \right) dL_\xi.$$

§ 7. Представление некоторых дифференциальных выражений в ортогональных системах координат

В ряд интегральных формул математической физики входят дифференциальные выражения, которые выше мы записывали в ортогональных декартовых координатах. Например, в формуле

Остроградского — Гаусса (1) и формуле Грина (7) мы встречались с выражениями:

$$\frac{\partial A_1}{\partial x_1}+\frac{\partial A_2}{\partial x_2}+\frac{\partial A_3}{\partial x_3}, \tag{43}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}. \tag{44}$$

Часто встречается также *формула Стокса*, которую приведем здесь без вывода *:

$$\iint_S B_n dS=\int_{\mathscr{F}S} A_\tau dL,$$

где S — кусочно-гладкая двусторонняя поверхность (в пространстве) с кусочно-гладкой границей $\mathscr{F}S$, а функции B_n и A_τ выражаются через заданные функции A_1, A_2, A_3 формулами:

$$B_n=\left(\frac{\partial A_3}{\partial x_2}-\frac{\partial A_2}{\partial x_3}\right)\cos(n,\ x_1)+\left(\frac{\partial A_1}{\partial x_3}-\frac{\partial A_3}{\partial x_1}\right)\cos(n,\ x_2)+ \\ +\left(\frac{\partial A_2}{\partial x_1}-\frac{\partial A_1}{\partial x_2}\right)\cos(n,\ x_3), \tag{45}$$

$$A_\tau=A_1\cos(\tau,\ x_1)+A_2\cos(\tau,\ x_2)+A_3\cos(\tau,\ x_3).$$

Здесь $\cos(n,\ x_i)$, $\cos(\tau,\ x_i)$, $i=1,\ 2,\ 3$ — направляющие косинусы соответственно нормали n к поверхности S и касательной τ к ее границе $\mathscr{F}S$. Положительное направление нормалей на S может быть выбрано произвольно, при этом в контурном интеграле $\int_{\mathscr{F}S} A_\tau dL$ граница $\mathscr{F}S$ должна обходиться против часовой стрелки, если смотреть из конца вектора какой-либо нормали к S. Функции A_1, A_2, A_3 предполагаются определенными в области V, содержащей поверхность S внутри себя, и непрерывными вместе со своими производными первого порядка. Эти функции могут быть приняты за компоненты некоторого вектора **A**. При этом функция B_n может рассматриваться как проекция на нормаль n вектора с компонентами

$$B_i=\frac{\partial A_k}{\partial x_j}-\frac{\partial A_j}{\partial x_k},\quad i,\ \ j,\ k=\begin{cases}1,\ 2,\ 3,\\ 2,\ 3,\ 1,\\ 3,\ 1,\ 2,\end{cases}$$

представляющего *вихрь вектора* **A** (т. е. $\mathbf{B}=\operatorname{rot}\mathbf{A}$).

Поставим целью найти вид дифференциальных выражений (43)—(45) в произвольных ортогональных системах координат.

Напомним определение ортогональных координат. При этом рассмотрим только координаты в пространстве, предоставив рассмотрение координат в двумерных областях читателю.

* См. В. И. Смирнов [1], т. II, п.п. 64 и 70.

Положим, что точка x определяется заданием трех параметров τ_1, τ_2, τ_3, т. е.

$$x = x(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$$

или

$$x_1 = x_1(\tau_1, \tau_2, \tau_3), \quad x_2 = x_2(\tau_1, \tau_2, \tau_3), \quad x_3 = x_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3). \quad (46)$$

Если эти три функции, определяющие координаты точки x через параметры τ_i, однозначны, то каждой совокупности значений τ_1, τ_2, τ_3 соответствует одна определенная точка x. Предположим, что функции (46) не только однозначны, но имеют непрерывные частные производные, и рассмотрим систему уравнений

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial \tau_1} d\tau_1 + \frac{\partial x_i}{\partial \tau_2} d\tau_2 + \frac{\partial x_i}{\partial \tau_3} d\tau_3 \quad (47)$$

относительно дифференциалов $d\tau_1$, $d\tau_2$, $d\tau_3$. Определитель D этой системы, составленный из частных производных $\frac{\partial x_i}{\partial \tau_j}$, называют *якобиевым* или *функциональным определителем* системы функций (46). Якобиев определитель системы (46), очевидно, является функцией параметров τ_1, τ_2, τ_3.

В теории дифференциальных уравнений доказывается следующее предложение*: если в некоторой окрестности T значений параметров $\tau_1 = \tau_1^0$, $\tau_2 = \tau_2^0$, $\tau_3 = \tau_3^0$, которым соответствует точка x^0 с координатами $x_1 = x_1^0$, $x_2 = x_2^0$, $x_3 = x_3^0$, якобиев определитель системы (46) не обращается в нуль, то в некоторой окрестности X точки x^0 система (46) допускает однозначное обращение:

$$\tau_1 = \tau_1(x_1, x_2, x_3), \quad \tau_2 = \tau_2(x_1, x_2, x_3), \quad \tau_3 = \tau_3(x_1, x_2, x_3),$$

причем функции $\tau_i = \tau_i(x_1, x_2, x_3)$ имеют в окрестности X непрерывные первые производные по x_1, x_2, x_3, а в точке x^0 принимают значения τ_i^0.

Таким образом, при рассматриваемом условии, каждой точке $x \in X$ соответствует определенная совокупность параметров τ_1, τ_2, τ_3, которая при подстановке в уравнения (46) дает декартовы координаты точки x. Иначе говоря, существует взаимно однозначное соответствие между точками x и тройками параметров τ_1, τ_2, τ_3, которые, в силу существования такого соответствия, и можно рассматривать как координаты точки x. Если хотя бы одно из уравнений (46) нелинейно относительно x_1, x_2, x_3, то эти координаты называют *криволинейными*, так как им соответствует криволинейная *координатная сеть*.

Обычно применяют криволинейные координаты, взаимно однозначно сопоставленные всем точкам изучаемой области, за исключением, быть может, некоторых точек или линий, где якобиев определитель системы функций (46) обращается в нуль. Эти точки

* См. В. И. Смирнов [1], т. III, ч. 1, п. 19.

(или линии) называют *особыми точками* (*линиями*) *соответствующих координат.*

Поверхности, на которых одна из криволинейных координат сохраняет постоянное значение, называют *координатными.* О поверхности, на которой постоянна координата τ_i, будем говорить как о поверхности τ_i; совокупность поверхностей τ_i образует *систему поверхностей* τ_i. По числу координат есть *три системы поверхностей*: τ_1, τ_2 и τ_3. Пересечение координатных поверхностей образует *координатные линии,* совокупность которых дает *координатную сеть.* Вдоль координатных линий меняется только одна из координат. По числу координат координатные линии также делятся на три системы. Вдоль линии *системы* τ_i меняется только координата τ_i. Три пары координатных поверхностей, в которые входят по две поверхности каждой системы, образуют *криволинейный координатный параллелепипед*, его ребра представляют части координатных линий.

Если любые две координатные поверхности разных систем пересекаются под прямым углом, то криволинейные координаты называют *ортогональными.* Очевидно, что в этом случае и координатные линии также пересекаются под прямыми углами.

Рассмотрим смещение некоторой точки x вдоль проходящей через нее координатной линии τ_j на расстояние, соответствующее приращению криволинейной координаты на $d\tau_j$. Из системы (47) вытекает, что декартовы координаты точки x получат при этом приращения:

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial \tau_j} d\tau_j \quad (i = 1,\ 2,\ 3).$$

Следовательно, направляющие косинусы касательной к линии τ_j в точке x пропорциональны частным производным $\frac{\partial x_1}{\partial \tau_j}$, $\frac{\partial x_2}{\partial \tau_j}$, $\frac{\partial x_3}{\partial \tau_j}$. Отсюда придем к следующему *условию ортогональности*:

$$\sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial x_\alpha}{\partial \tau_j}\frac{\partial x_\alpha}{\partial \tau_k} = 0 \quad \text{если} \quad j \neq k.$$

Величина смещения, соответствующего приращению криволинейной координаты на $d\tau_j$, равна

$$ds_j = \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2} = d\tau_j \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial \tau_j}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial \tau_j}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial \tau_j}\right)^2} = h_j d\tau_j,$$

где

$$h_j \equiv \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial \tau_j}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial \tau_j}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial \tau_j}\right)^2}.$$

Величины h_j ($j = 1,\ 2,\ 3$) называют *координатными параметрами Ламе.*

Объем бесконечно-малого криволинейного координатного параллелепипеда, очевидно, равен

$$ds_1 ds_2 ds_3 = h_1 h_2 h_3 d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3.$$

Произведение $h_1 h_2 h_3$ параметров Ламе с точностью до знака равно якобиеву определителю преобразователя. Чтобы убедиться в этом, достаточно возвести якобиев определитель в квадрат, используя правило умножения «столбец на столбец». При этом, в силу соотношений ортогональности, получим

$$D^2 = \begin{vmatrix} h_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & h_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & h_3^2 \end{vmatrix} = (h_1 h_2 h_3)^2.$$

Таким образом, в особых точках координат хотя бы один из параметров Ламе обращается в нуль.

Ниже мы будем пользоваться только двумя типами криволинейных координат: *цилиндрическими и сферическими.*

Цилиндрические координаты r, φ, z точки x определяются системой уравнений:

$$x_1 = r\cos\varphi, \quad x_2 = r\sin\varphi, \quad x_3 = z \quad (0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi).$$

Координатные параметры Ламе имеют значения:

$$h_1 \equiv h_r = 1, \quad h_2 \equiv h_\varphi = r, \quad h_3 \equiv h_z = 1. \tag{48}$$

Координатные поверхности r образуют систему круговых цилиндрических поверхностей радиуса r с общей осью, совпадающей с осью 3 декартовых координат и называемой *осью цилиндрических координат*; координатные поверхности φ образуют систему полуплоскостей, для которых ось цилиндрических координат является границей; координатные поверхности z образуют систему плоскостей, перпендикулярных оси цилиндрических координат. Координата r представляет расстояние точки x от оси 3 декартовых координат (или, что то же, от оси цилиндрических координат), φ — угол между координатной полуплоскостью, проходящей через точку x и координатной полуплоскостью, в которой лежит ось 1 декартовых координат, z совпадает с декартовой координатой x_3.

Через каждую точку x, не лежащую на оси цилиндрических координат, проходит по одной координатной поверхности r, φ и z. На оси цилиндрических координат параметр $h_\varphi = 0$, следовательно, она является особой. На этой оси координата φ не имеет определенного значения.

Сферические координаты r, θ, φ точки x определяются системой уравнений:

$$x_1 = r\sin\theta\cos\varphi, \quad x_2 = r\sin\theta\sin\varphi, \quad x_3 = r\cos\theta;$$
$$0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi.$$

Координатные параметры Ламе имеют значения:

$$h_1 \equiv h_r = 1, \quad h_2 \equiv h_\theta = r, \quad h_3 \equiv h_\varphi = r \sin\theta. \tag{49}$$

Координатные поверхности r образуют систему сферических поверхностей с общим центром в точке $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, называемой *началом сферических координат*; координатные поверхности θ образуют систему круговых конусов с общей осью, совпадающей с осью 3 декартовых координат, эту ось называют *полярной*; координатные поверхности φ образуют систему полуплоскостей, проходящих через полярную ось Координата r представляет длину радиуса вектора точки x, θ — угол между радиусом-вектором и полярной осью, φ — угол между координатной полуплоскостью, проходящей через точку x, и координатной полуплоскостью, в которой лежит ось 1 декартовых координат.

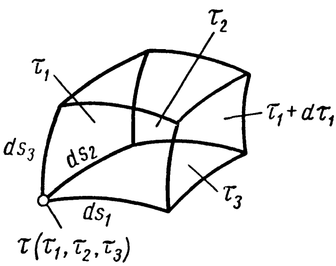

Рис. 28

Через каждую точку x, не лежащую на полярной оси, проходит по одной координатной поверхности r, θ, φ. На полярной оси параметр $h_\varphi = 0$, следовательно, она является особой. На этой оси координата φ не имеет определенного значения В особой точке $r = 0$ не определена также и координата θ.

Перейдем теперь к вычислению интересующих нас дифференциальных выражений в ортогональных координатах.

Будем исходить из формулы Остроградского — Гаусса (1), приняв в ней за функции A_1, A_2, A_3 компоненты некоторого вектора $\mathbf{A}$, а за область V — криволинейный координатный параллелепипед, образованный шестью координатными поверхностями: τ_1, $\tau_1 + d\tau_1$, τ_2, $\tau_2 + d\tau_2$, τ_3, $\tau_3 + d\tau_3$ (рис. 28). Длины ребер этого параллелепипеда равны

$$ds_1 = h_1 d\tau_1, \quad ds_2 = h_2 d\tau_2, \quad ds_3 = h_3 d\tau_3. \tag{50}$$

Разбив интеграл по поверхности параллелепипеда на сумму интегралов по его граням, получим

$$\iiint\limits_V \left(\frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3}\right) dV = \sum_{\alpha=1}^{3} \left(\iint\limits_{S_{\tau_\alpha}} A_n dS_\alpha + \iint\limits_{S_{\tau_\alpha + d\tau_\alpha}} A_n dS_\alpha \right),$$

где S_{τ_α} и $S_{\tau_\alpha + d\tau_\alpha}$ — грани, образованные координатными поверхностями τ_α и $\tau_\alpha + d\tau_\alpha$ а $A_n = \sum\limits_{\beta=1}^{3} A_\beta \cos(n, x_\beta)$ — проекции вектора $\mathbf{A}$ на нормали к соответствующим граням. Заметив, что на одних гранях параллелепипеда направление внешней нормали совпадает с направлением нормальной к грани координатной линии, а на противолежащих им гранях оно противоположно, с помощью теоремы о среднем найдем, что

$$\iiint\limits_V \left(\frac{\partial A_1}{\partial x_1}+\frac{\partial A_2}{\partial x_2}+\frac{\partial A_3}{\partial x_3}\right) dV=\left(\frac{\partial A_1}{\partial x_1}+\frac{\partial A_2}{\partial x_2}+\frac{\partial A_3}{\partial x_3}\right)\bar{V},$$

$$\iint\limits_{S_{\tau_\alpha}} A_n dS_\alpha = -\iint\limits_{S_{\tau_\alpha}} A_{\tau_\alpha} dS_\alpha = -A_{\tau_\alpha}\bar{S}, \qquad \alpha=1,\ 2,\ 3,$$

$$\iint\limits_{S_{\tau_\alpha+d\tau_\alpha}} A_n dS_\alpha = \iint\limits_{S_{\tau_\alpha+d\tau_\alpha}} A_{\tau_\alpha} dS_\alpha = A_{\tau_\alpha+d\tau_\alpha}\bar{S}_{\tau_\alpha+d\tau_\alpha}, \ \alpha=1,\ 2,\ 3,$$

где $\bar{V}$ — объем параллелепипеда, $\bar{S}_{\tau_\alpha}$, $\bar{S}_{\tau_\alpha+d\tau_\alpha}$ — площади граней параллелепипеда, а значения функций в правых частях этих соотношений берутся в некоторых внутренних точках соответствующих областей интегрирования.

С точностью до малых высшего порядка можно положить

$$A_{\tau_\alpha+d\tau_\alpha}\bar{S}_{\tau_\alpha+d\tau_\alpha} = A_{\tau_\alpha}\bar{S}_{\tau\alpha}\frac{\partial A_{\tau_\alpha}\bar{S}_{\tau_\alpha}}{\partial\tau_\alpha}\,d\tau_\alpha.$$

Подставив найденные выражения в формулу Остроградского — Гаусса, получим

$$\left(\frac{\partial A_1}{\partial x_1}+\frac{\partial A_2}{\partial x_2}+\frac{\partial A_3}{\partial x_3}\right)\bar{V}=\sum_{\alpha=1}^{3}\left[\left(A_\alpha\bar{S}_\alpha+\frac{\partial}{\partial\tau_\alpha}A_\alpha\bar{S}_\alpha d\tau_\alpha\right)-A_\alpha\bar{S}_\alpha\right]= \\ =\sum_{\alpha=1}^{3}\frac{\partial A_\alpha\bar{S}_\alpha}{d\tau_\alpha}\,d\tau_\alpha.$$

Подставив сюда значения

$$\bar{V}=ds_1 ds_2 ds_3 = h_1h_2h_3 d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3, \tag{51а}$$

$$\bar{S}_\alpha = ds_\beta\, ds_\gamma = h_\beta h_\gamma\, d\tau_\beta d\tau_\gamma, \quad \alpha,\ \beta,\ \gamma=\begin{cases}1,\ 2,\ 3,\\ 2,\ 3,\ 1,\\ 3,\ 1,\ 2\end{cases} \tag{51б}$$

и перейдя к пределу при $V\to 0$, придем к искомой формуле:

$$\frac{\partial A_1}{\partial x_1}+\frac{\partial A_2}{\partial x_2}+\frac{\partial A_3}{\partial x_3}=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial\tau_1}h_2h_3A_1+\frac{\partial}{\partial\tau_2}h_3h_1A_2+\frac{\partial}{\partial\tau_3}h_1h_2A_3\right]. \tag{52}$$

Положив

$$A_i\equiv\frac{\partial u}{\partial x_i} \qquad (i=1,\ 2,\ 3)$$

и заметив, что

$$\frac{\partial u}{\partial s_\alpha}=\frac{\partial u}{h_\alpha\partial\tau_\alpha} \qquad (\alpha=1,\ 2,\ 3), \tag{53}$$

получим также формулу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial\tau_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial u}{\partial\tau_1}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial\tau_2}\left(\frac{h_3h_1}{h_2}\frac{\partial u}{\partial\tau_2}\right)+\frac{\partial}{\partial\tau_3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial u}{\partial\tau_3}\right)\right]. \tag{54}$$

Применим теперь интегральную формулу Стокса к одной из граней рассматриваемого нами параллелепипеда, например, для определенности, к грани, образованной координатной поверхностью τ_1 (см. рис. 28). Разбив интеграл по контуру грани на сумму интегралов по ее ребрам, применив теорему о среднем и приняв во внимание соотношения (50), получим

$$B_1\bar{S}_1=A_2ds_2-A_3ds_3+A_3ds_3+\frac{\partial}{\partial\tau_2}A_3ds_3d\tau_2-A_2ds_2-$$
$$-\frac{\partial}{\partial\tau_3}A_2ds_2d\tau_3=\frac{\partial}{\partial\tau_2}h_3A_3d\tau_3d\tau_2-\frac{\partial}{\partial\tau_3}h_2A_2d\tau_2d\tau_3,$$

где B_1 — проекция вектора **B** на направление τ_1. В этом соотношении принято, что нормаль к контуру направлена в сторону возрастания координаты τ_1. Соответствующее направление обхода контура показано на рис. 29.

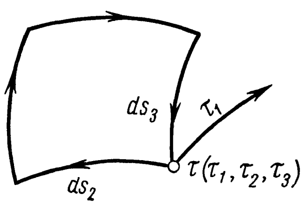

Рис. 29

Подставим значение площади $\bar{S}_1$ из соотношений (51), что даст

$$B_1=\frac{1}{h_2h_3}\left(\frac{\partial h_3A_3}{d\tau_2}-\frac{dh_2A_2}{d\tau_3}\right).$$

Отсюда, с помощью круговой перестановки индексов, найдем, что вообще:

$$B_\alpha=\frac{1}{h_\beta h_\gamma}\left(\frac{\partial h_\gamma A_\gamma}{\partial\tau_\beta}-\frac{\partial h_\beta A_\beta}{\partial\tau_\gamma}\right),\quad \alpha,\ \beta,\ \gamma=\begin{cases}1,\ 2,\ 3,\\ 2,\ 3,\ 1,\\ 3,\ 1,\ 2.\end{cases} \tag{55}$$

Спроектировав вектор **B** с компонентами, определенными этими формулами, на произвольное направление n и приравняв полученное выражение и выражение (45), придем к формуле

$$\left(\frac{\partial A_3}{dx_2}-\frac{\partial A_2}{\partial x_3}\right)\cos(n,\ x_1)+\left(\frac{\partial A_1}{\partial x_3}-\frac{\partial A_3}{\partial x_1}\right)\cos(n,\ x_2)+$$
$$+\left(\frac{\partial A_2}{\partial x_1}-\frac{\partial A_1}{\partial x_2}\right)\cos(n,\ x_3)=\frac{1}{h_2h_3}\left(\frac{\partial h_3A_3}{\partial\tau_2}-\frac{\partial h_2A_2}{\partial\tau_3}\right)\cos(n,\ \tau_1)+$$
$$+\frac{1}{h_3h_1}\left(\frac{\partial h_1A_1}{\partial\tau_3}-\frac{\partial h_3A_3}{\partial\tau_1}\right)\cos(n,\ \tau_2)+\frac{1}{h_1h_2}\left(\frac{\partial h_2A_2}{\partial\tau_1}-\frac{\partial h_1A_1}{\partial\tau_2}\right)\cos(n,\ \tau_3). \tag{56}$$

ЗАДАЧИ

1. Вывести формулу (54), пользуясь формулой Грина (7).

Указание. В формуле Грина следует положить $v = -1$.

2. Показать, что в ортогональных криволинейных координатах на плоскости соотношение (54) примет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = \frac{1}{h_1 h_2}\left[\frac{\partial}{\partial \tau_1}\left(\frac{h_2}{h_1}\frac{\partial u}{\partial \tau_1}\right) + \frac{\partial}{\partial \tau_2}\left(\frac{h_1}{h_2}\frac{\partial u}{\partial \tau_2}\right)\right],$$

где параметры h_1 и h_2 имеют тот же смысл, что и в трехмерном случае.

3. Доказать, что при замене переменных по формулам

$$x_1 = (c + r\cos\theta)\cos\varphi, \quad x_2 = (c + r\cos\theta)\sin\varphi, \quad x_3 = r\sin\theta,$$

дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = 0$$

примет вид

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[r(c + r\cos\theta)\frac{\partial u}{\partial r}\right] + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left[(c + r\cos\theta)\frac{\partial u}{\partial\theta}\right] + \frac{r}{c + r\cos\theta}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} = 0.$$

4. Доказать, что при задании координатных поверхностей уравнениями

$$(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{c\,\mathrm{sh}\,\tau_2}{\mathrm{ch}\,\tau_1 - \cos\tau_2}, \quad x_2 = x_1 \mathrm{th}\,\tau_3,$$

$$x_3 = \frac{c\,\mathrm{sh}\,\tau_1}{\mathrm{ch}\,\tau_1 - \cos\tau_2},$$

получим ортогональную криволинейную систему координат с параметрами

$$h_1 = h_2 = \frac{c}{\mathrm{ch}\,\tau_1 - \cos\tau_2}, \qquad h_3 = \frac{c\,\mathrm{sh}\,\tau_1}{\mathrm{ch}\,\tau_1 - \cos\tau_2}.$$

Эта система координат носит название *тороидальной*. Ее координатные поверхности представляют поверхности тора, поверхности шара и плоскости.

5. Доказать, что при задании координатных поверхностей уравнениями

$$(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{c\sin\tau_2}{\mathrm{ch}\,\tau_1 - \cos\tau_2}, \quad x_2 = x_1\,\mathrm{tg}\,\tau_3, \qquad x_3 = \frac{c\,\mathrm{sh}\,\tau_1}{\mathrm{ch}\,\tau_1 - \cos\tau_2},$$

получим ортогональную криволинейную систему координат с параметрами

$$h_1 = h_2 = \frac{c}{\mathrm{ch}\,\tau_1 - \cos\tau_2}, \quad h_3 = \frac{c\sin\tau_2}{\mathrm{ch}\,\tau_1 - \cos\tau_2}.$$

Эта система координат носит название *биполярной*.