Глава XIX

УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА И ПУАССОНА

§ 1. Уравнения Лапласа и Пуассона. Примеры задач, приводящих к уравнению Лапласа

Уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}=0, \tag{1}$$

где x_1, x_2, x_3 — ортогональные декартовы координаты, называют *уравнением Лапласа*. Выражение, стоящее в левой его части, называют *лапласианом функции u*, а правило, по которому образуется это выражение, — *оператором Лапласа*. Оператор Лапласа принято обозначать символом Δ, вследствие чего уравнение (1) может быть записано в форме

$$\Delta u=0.$$

Неоднородное уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}=f \tag{2}$$

или

$$\Delta u=f,$$

где f — заданная функция, называют *уравнением Пуассона*.

Вид дифференциальных выражений в левых частях уравнений Лапласа и Пуассона одинаков во всех ортогональных декартовых координатах. При переходе к криволинейным координатам он изменяется и может быть, для ортогональных криволинейных координат, определен с помощью соотношений § 7 предыдущей главы. В частности, используя формулы (54), (48) и (49) гл. XVIII найдем, что в цилиндрических координатах r, φ, z

$$\Delta\equiv\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}, \tag{3}$$

в сферических координатах r, θ, φ

$$\Delta\equiv\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}. \tag{4}$$

К уравнениям Лапласа и Пуассона приводят многочисленные задачи теории теплопроводности, электростатики, гидродинамики и т. д. Рассмотрим, например, постановку некоторых задач для уравнения Лапласа.

1. Задача о стационарном тепловом состоянии однородного тела. Допустим, что мы имеем некоторое изо-

лированное от внешнего пространства однородное изотропное тело, тепловое состояние которого не меняется с течением времени. Обозначим через V занятую им часть пространства, через $\mathcal{F}V$ — его поверхность, а через $u(x)$ — температуру в точке $x \in V$.

Докажем, что во всякой внутренней точке x взятого нами тела функция $u(x)$ удовлетворяет уравнению Лапласа.

С этой целью выделим из тела некоторую область V_1, ограниченную произвольно взятой поверхностью $\mathcal{F}V_1$, и рассмотрим количество тепла, которое проходит в единицу времени через элемент dS_1 поверхности. Согласно принципу Фурье, оно пропорционально площади элемента и нормальной производной $\frac{du}{dn}$, где через n обозначено направление *внешней* нормали к поверхности. Другими словами, это количество тепла равно произведению

$$k\frac{du}{dn}\,dS_1.$$

Коэффициент пропорциональности k называется *коэффициентом внутренней теплопроводности тела.*

Рассмотрим движение тепла в теле. Из термодинамики известно, что тепло течет от точек с большей температурой к точкам с меньшей температурой. Следовательно, при отрицательной производной $\frac{du}{dn}$ поток тепла будет происходить из внутренней части тела, ограниченной поверхностью $\mathcal{F}V_1$, в область, внешнюю по отношению к этой поверхности. Если же указанная производная положительна, то распространение тепла будет представлять обратную картину.

Отсюда вытекает, что двойной интеграл

$$k\iint_{\mathcal{F}V_1}\frac{du}{dn}\,dS_1 \tag{5}$$

дает алгебраическую сумму количества тепла, прошедшего за единицу времени через поверхность $\mathcal{F}V_1$, причем *вытекающему теплу* приписывается отрицательный знак, а *втекающему* — положительный.

Если предположить, что внутри тела отсутствуют как источники тепла, так и точки его поглощения, то интеграл (5) должен равняться нулю. Действительно, если бы это было не так, то тепло накапливалось бы или терялось внутри тела, и, следовательно, температура тела изменилась бы с течением времени, что противоречит предположению о неизменности теплового состояния тела.

Итак, в данном случае должно иметь место следующее равенство:

$$\iint_{\mathcal{F}V_1}\frac{du}{dn}\,dS_1 = 0. \tag{6}$$

Применим в области V_1 формулу Грина (7) гл. XVIII:

$$\iiint\limits_{V_1} (u\Delta v - v\Delta u)\, dV = \iint\limits_{\mathcal{F}V_1} \left(u \frac{dv}{dn} - v \frac{du}{dn} \right) dS_1$$

и положим в ней $v=1$.

Тогда, приняв во внимание, что интеграл (5) равен нулю, найдем, что

$$\iiint\limits_{V_1} \Delta u\, dV_1 = 0.$$

Отсюда, ввиду произвольности области V_1, вытекает, что

$$\Delta u = 0,$$

т. е. функция $u(x)$ удовлетворяет уравнению Лапласа.

Предположим теперь, что нам известно распределение температуры на поверхности $\mathcal{F}V$ тела и мы желаем определить температуру любой точки, находящейся *внутри* тела.

Очевидно, мы решим эту задачу, если найдем такое решение уравнения Лапласа, которое удовлетворяло бы граничному условию

$$u = f(x) \quad \text{когда} \quad x \in \mathcal{F}V, \tag{7}$$

где $f(x)$ обозначает температуру в точке x поверхности $\mathcal{F}V$.

2. Задача о равновесии электрических масс на поверхности проводника. Рассмотрим стационарное электростатическое поле, созданное в пространстве некоторой системой электрических зарядов. Если заряды $q_1, q_2, \ldots, q_n$ расположены дискретно в точках $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, то потенциал поля в точке x

$$u = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{q_\alpha}{r_\alpha}, \tag{8}$$

где $r_\alpha = |\xi_\alpha - x|$ — расстояние от заряда q_α до точки x. Если же заряды непрерывно распределены на некоторой линии L, или поверхности S, или в объеме V, то потенциал поля соответственно выражается одним из интегралов:

$$u = \int\limits_{\alpha} \frac{\rho_2}{r} dL, \quad u = \iint\limits_{S} \frac{\rho_1}{r} dS, \quad u = \iiint\limits_{V} \frac{\rho}{r} dV, \tag{9}$$

где r — расстояние от элемента линии (поверхности, объема) до точки поля, обладающей потенциалом u. В этих формулах величины ρ_2, ρ_1 и ρ обозначают линейную, поверхностную или объемную плотность зарядов:

$$\rho_2 = \lim_{\Delta L \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta L} = \frac{dq}{dL}, \quad \rho_1 = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta S} = \frac{dq}{dS},$$

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} = \frac{dq}{dV}, \tag{10}$$

где Δq — заряд элемента линии L (поверхности S, объема V). В общем случае потенциал поля равен сумме потенциалов, созданных каждым из этих видов распределения зарядов в отдельности.

Допустим, что конечная область V пространства занята проводящей средой — проводником, т. е. средой, в которой заряды могут свободно передвигаться, а остальная часть пространства — диэлектриком, т. е. средой, в которой движение зарядов невозможно.

В стационарном состоянии потенциал поля во всех точках области V, включая ее границу, одинаков, так как иначе бы возникло движение электрических зарядов, стремящееся выровнять потенциал, и поле менялось бы. Отсюда непосредственно очевидно, что в области V потенциал поля u удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\Delta u = 0. \tag{11}$$

Внутри проводника заряды разных знаков должны быть взаимно нейтрализованы. В самом деле, оставшиеся внутри проводника избыточные заряды какого-либо знака под действием отталкивания между одноименными зарядами перемещались бы до тех пор, пока все они не оказались бы на границе проводника и не распределились на ней должным образом. Следовательно, если достигается стационарное состояние, то избыточные заряды располагаются на границе $\mathscr{F}V$ проводника в виде бесконечно тонкого электрического слоя.

Потенциал этого слоя в точке x выражается интегралом:

$$u = \iint\limits_{\mathscr{F}V} \frac{\rho_1}{r} \, dS, \tag{12}$$

где r — расстояние от переменной точки ξ поверхности проводника до точки x.

Если точка x находится вне проводника, то функция $\frac{1}{r}$ удовлетворяет уравнению Лапласа. В самом деле,

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{r} = \frac{x_i - \xi_i}{r^3}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \frac{1}{r} = -3 \frac{(x_i - \xi_i)^2}{r^4} + \frac{1}{r^3},$$

откуда

$$\Delta \frac{1}{r} = \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha^2} \frac{1}{r} = \frac{3}{r^3} - \frac{3}{r^4} \sum_{\alpha=1}^{3} (x_\alpha - \xi_\alpha)^2 = 0.$$

Следовательно, уравнению Лапласа удовлетворяет и потенциал u, определяемый формулой (12). Чтобы доказать это утверждение, достаточно применить к интегралу (12) правило дифференцирования по параметру, что мы имеем право сделать, так как, по предположению, точка x находится вне поверхности S и, следовательно, подынтегральная функция в выражении (12) нигде не обращается в бесконечность.

Итак, в каждой точке x, лежащей *вне* проводника, потенциал u также удовлетворяет уравнению Лапласа.

Обратимся теперь к выяснению обстоятельств, имеющих место в бесконечно удаленных точках пространства, заполненного диэлектриком, и на самой поверхности проводника.

Как мы это выясним ниже, интеграл (12) обращается в бесконечно удаленных точках в нуль (вместе со своими частными производными первого порядка), и притом так, что произведения

$$ru, \quad r^2 \frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad (i=1,\ 2,\ 3)$$

остаются ограниченными, когда расстояние r от точки x до начала координат увеличивается до бесконечности. Что касается обстоятельств, имеющих место на поверхности проводника, то будет доказано, что потенциал u остается ограниченным и непрерывным при переходе точки x через поверхность проводника. Напротив, нормальные производные потенциала u при таком переходе претерпевают конечный разрыв непрерывности, причем этот разрыв характеризуется равенством

$$\frac{du}{dn_i} - \frac{du}{dn_e} = 4\pi\rho_1, \tag{13}$$

где $\frac{du}{dn_i}$ и $\frac{du}{dn_e}$ — предельные значения выражения

$$\sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \cos(n,\ x_\alpha)$$

при приближении точки x к точке $\xi \in \mathcal{F}V$ соответственно по внутренней и внешней нормали к $\mathcal{F}V$ в точке ξ.

Воспользуемся равенством (13) для постановки так называемой электростатической задачи: найти плотность электрического слоя, непрерывно распределенного на поверхности данного проводника, если последний находится в состоянии электрического равновесия.

Допустим, что для данного проводника такое состояние наступило. Тогда, по данным выше разъяснениям, потенциал внутри проводника будет величиной постоянной, и, следовательно, будет иметь место равенство

$$\frac{du}{dn_i} = 0.$$

Из этого равенства и из формулы (13) вытекает, что

$$\rho_1 = -\frac{1}{4\pi} \frac{du}{dn_e}, \tag{14}$$

т. е. искомая плотность слоя будет найдена, если мы определим потенциал u этого слоя в точках, лежащих вне проводника.

Таким образом, поставленная задача свелась к нахождению функции u во всех точках окружающего проводник пространства, удовлетворяющей уравнению Лапласа, стремящейся к нулю на бесконечности и удовлетворяющей условию

$$u(x) = \text{const}, \text{ когда } x \in \mathcal{F}V.$$

3. Задача о движении несжимаемой жидкости. Исследуем установившееся движение несжимаемой жидкости. Обозначим через $\mathbf{v}$ вектор скорости жидкости, и пусть v_1, v_2, v_3 — его проекции на неподвижные оси координат. В дальнейшем исследовании будем предполагать, что эти проекции не зависят явным образом от времени t. Такое движение жидкости будем называть *установившимся*.

Допустим теперь, что движение жидкости происходит с потенциалом скоростей u, другими словами, будем считать, что имеют место равенства

$$v_i = \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, 3). \tag{15}$$

Докажем, что этот потенциал удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta u = 0. \tag{16}$$

В самом деле, в гл. I было доказано, что проекции v_1, v_2 и v_3 вектора $\mathbf{v}$ и плотность ρ жидкости связаны между собой уравнением неразрывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial \rho v_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0.$$

Принимая во внимание, что для несжимаемой жидкости плотность ρ постоянна, мы можем переписать это уравнение в следующем виде:

$$\sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0.$$

Внося сюда вместо v_α, $\alpha = 1, 2, 3$, их выражения по формулам (15), придем к уравнению Лапласа (16).

Что касается граничных условий, то они будут зависеть от существа рассматриваемой гидродинамической задачи. Например, на твердых стенках бассейна будем иметь

$$\frac{du}{dn} = 0,$$

где n — нормаль к стенке. Если твердое тело движется в жидкости заданным образом, то на поверхности тела

$$\frac{du}{dn} = f(x), \tag{17}$$

где $f(x)$ — заданная функция. Более сложные граничные условия получаются для свободной поверхности жидкости (см. гл. XXIII).

Кроме того, надо принять во внимание условия, которым должен удовлетворять потенциал на бесконечности. Во многих гидродинамических задачах предполагают, что вызывающее движение жидкости возмущение, если оно действует в ограниченной области пространства, не изменяет состояния покоя жидкости на бесконечном удалении от этой области. При этом на бесконечности будут обращаться в нуль частные производные $\frac{du}{dx_i}$, причем можно доказать, что величины

$$|ru|, \qquad \left| r^2 \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| \quad (i = 1,\ 2,\ 3)$$

будут ограниченными при беспредельно возрастающем r.

ЗАДАЧА

Доказать, что задача о стационарном распределении температуры в ограниченном однородном теле, внутри которого находятся непрерывно распределенные источники тепла, приводится к интегрированию уравнения

$$\Delta u = -4\pi f_1, \quad \text{когда} \quad x \in V - \mathfrak{F}V,$$

при условии

$$\frac{\partial u}{\partial n} + ku + f = 0, \quad \text{когда} \quad x \in \mathfrak{F}V,$$

где V — область, занятая телом, а k, f_1 и f — некоторые функции, причем функция f_1 задана внутри тела, а функции f и k — на его поверхности.

§ 2. Граничные задачи

Выше мы рассмотрели ряд физических задач. Каждая из них приводила к следующей математической задаче: найти функцию u, которая во всех *внутренних* точках заданной области V удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta u = 0$, *а на границе* $\mathfrak{F}V$ области V — некоторому условию. Это последнее получило название *граничного условия*, в связи с чем рассматриваемую математическую задачу называют *граничной*. Употребительны также термины: краевое условие, предельное условие и соответственно: краевая задача, предельная задача. Мы этими терминами пользоваться не будем.

Граничные задачи могут ставиться не только для уравнения Лапласа, но и для любых уравнений эллиптического типа.