где n — нормаль к стенке. Если твердое тело движется в жидкости заданным образом, то на поверхности тела

$$\frac{du}{dn} = f(x), \tag{17}$$

где $f(x)$ — заданная функция. Более сложные граничные условия получаются для свободной поверхности жидкости (см. гл. XXIII).

Кроме того, надо принять во внимание условия, которым должен удовлетворять потенциал на бесконечности. Во многих гидродинамических задачах предполагают, что вызывающее движение жидкости возмущение, если оно действует в ограниченной области пространства, не изменяет состояния покоя жидкости на бесконечном удалении от этой области. При этом на бесконечности будут обращаться в нуль частные производные $\frac{du}{dx_i}$, причем можно доказать, что величины

$$|ru|, \qquad \left| r^2 \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| \quad (i = 1,\ 2,\ 3)$$

будут ограниченными при беспредельно возрастающем r.

ЗАДАЧА

Доказать, что задача о стационарном распределении температуры в ограниченном однородном теле, внутри которого находятся непрерывно распределенные источники тепла, приводится к интегрированию уравнения

$$\Delta u = -4\pi f_1, \quad \text{когда} \quad x \in V - \mathfrak{F}V,$$

при условии

$$\frac{\partial u}{\partial n} + ku + f = 0, \quad \text{когда} \quad x \in \mathfrak{F}V,$$

где V — область, занятая телом, а k, f_1 и f — некоторые функции, причем функция f_1 задана внутри тела, а функции f и k — на его поверхности.

§ 2. Граничные задачи

Выше мы рассмотрели ряд физических задач. Каждая из них приводила к следующей математической задаче: найти функцию u, которая во всех *внутренних* точках заданной области V удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta u = 0$, *а на границе* $\mathfrak{F}V$ области V — некоторому условию. Это последнее получило название *граничного условия*, в связи с чем рассматриваемую математическую задачу называют *граничной*. Употребительны также термины: краевое условие, предельное условие и соответственно: краевая задача, предельная задача. Мы этими терминами пользоваться не будем.

Граничные задачи могут ставиться не только для уравнения Лапласа, но и для любых уравнений эллиптического типа.

В зависимости от вида граничного условия различают три основных вида граничной задачи *:

1. $u(x) = \psi(x)$, когда $x \in \mathcal{F}V$ — первая граничная задача или *задача Дирихле*,
2. $\frac{du}{dn} = \psi(x)$, когда $x \in \mathcal{F}V$ — вторая граничная задача или *задача Неймана*,
3. $\frac{du}{dn} + \beta u = \psi(x)$, когда $x \in \mathcal{F}V$ — третья или *смешанная граничная задача*.

Здесь ψ и β — непрерывные функции, определенные на граничной поверхности $\mathcal{F}V$, а $\frac{du}{dn}$ означает производную, взятую в точке поверхности $\mathcal{F}V$ по направлению внешней нормали к ней.

К этим видам граничной задачи приводит изучение широкого круга *стационарных* физических процессов и явлений. В частности, примеры, рассмотренные в предыдущем параграфе, привели нас к задачам Дирихле и Неймана. Однако встречаются задачи и с другими граничными условиями. К их числу принадлежат, например, задачи гидродинамики, в которых рассматриваются свободные поверхности жидких сред, и др. Если рассматриваемая физическая среда неоднородна, но состоит из нескольких однородных частей, то на их границах должны выполняться некоторые *условия сопряжения* и т. п.

Если область, в которой ищется решение уравнения, ограничена, то граничная задача называется *внутренней*. Если же эта область является частью пространства, лежащей вне некоторой ограниченной области, то граничная задача называется *внешней*. Если границей области является плоскость, то говорят, что граничная задача ставится для *полупространства*. Задача о тепловом состоянии однородного тела, сформулированная в предыдущем параграфе, представляет пример внутренней задачи Дирихле, а электростатическая задача — внешней.

Уточним теперь математическую формулировку граничной задачи. Как упоминалось во введении, задачу математической физики называют *поставленной корректно*, если ее решение существует, единственно и непрерывно зависит от данных задачи.

Требования, содержащиеся в формулировке понятия корректности, отражают наше общее представление о широком круге физических явлений, как непременно происходящих, если созданы необходимые условия (решение существует), полностью определенных условиями их протекания (решение единственно) и протекающих почти одинаково, если условия их протекания достаточно

* См. также Дополнение к ч. II, п. 2.

близки (непрерывная зависимость решения от данных задачи*. Корректная постановка задачи обычно обеспечивает физическую содержательность решения.

Условия, обеспечивающие корректность постановки той или иной граничной задачи, несколько различаются для разного типа задач. Но существует основная группа условий, входящих во все эти формулировки. Она сводится к следующему. Функция, дающая решение граничной задачи (поставленной для уравнения в частных производных второго порядка) должна:

1) быть непрерывна в области, в которой ставится задача, вплоть до границы области;
2) внутри области иметь непрерывные вторые производные и удовлетворять заданному уравнению (например, уравнению Лапласа, Пуассона и т. д.);
3) на границе области удовлетворять заданному граничному условию;
4) если область трехмерна и бесконечна, то при перемещении к бесконечно удаленной точке вдоль любого луча, принадлежащего области, стремиться к нулю.

Решения граничных задач, поставленных в трехмерных областях, удовлетворяющие перечисленным условиям, будем называть *регулярными.*

Как мы покажем, регулярные решения основных граничных задач единственны (иногда при некоторых дополнительных условиях) и непрерывно зависят от граничных условий. Проблемы же *существования решений*, требующей применения специального математического аппарата, мы касаться не будем. Отметим лишь, что регулярные решения существуют только тогда, когда заданное граничное условие достаточно гладко. Это обстоятельство, практически, не является важным, так как любое граничное условие, имеющее физический смысл, может быть сколь угодно точно приближено достаточно гладкими функциями. В рамках идеализированного рассмотрения физических объектов как непрерывных, это приближение будет иметь тот же физический смысл, что и исходное условие. Другое решение вопроса о существовании решений дается теорией *обобщенных решений.*

В заключение отметим, что решения корректно поставленных граничных задач для любого уравнения эллиптического типа всегда оказываются не менее гладкими (в смысле существования у них определенного числа непрерывных производных), чем опре-

---

* Конечно, нельзя утверждать, что задача, поставленная некорректно в указанном смысле, обязательно будет лишена физического содержания. Например, отказ от последнего требования (непрерывная зависимость от данных задачи) может оказаться необходимым при исследовании условий устойчивости процесса и т. п. Однако в большинстве физических проблем требование корректности (в указанном смысле) оказывается необходимой частью строгой формулировки математической постановки задачи.

деляющие их функции (коэффициенты уравнения и данные задачи). Обычно во всех внутренних точках изучаемой области они даже дифференцируемы неограниченное число раз. Это свойство решений граничных задач тесно связано с тем, что к граничным задачам приводит изучение установившихся (стационарных) физических процессов — равновесий, являющихся конечным результатом предшествующего процесса выравнивания. Из физических соображений очевидно, что при этом не только решения задачи, но и граничные условия, достаточно точно передающие природу явления, будут весьма гладкими.

§ 3. Гармонические функции

Говорят, что *в точке x функция $u(x)$ является гармонической* (или *гармонична*), если в этой точке она имеет непрерывные вторые производные и удовлетворяет уравнению Лапласа. Говорят, что *функция $u(x)$ является гармонической* (или *гармонична*) *в замкнутой области V*, если она

1) непрерывна в этой области,
2) гармонична во всех внутренних точках области,
3) когда область V бесконечна, стремится к нулю при стремлении точки x к бесконечно удаленной точке вдоль *любого* луча, принадлежащего области.

Отметим, что в силу этого определения регулярные решения граничных задач для уравнения Лапласа являются функциями, гармоническими в рассматриваемой области.

Установим некоторые важные свойства гармонических функций.

Теорема о максимуме и минимуме. Если функция $u(x)$ гармонична в области V, то она не имеет внутри этой области ни максимумов, ни минимумов, достигая своих наибольшего и наименьшего значений на ее границе.

Для доказательства предположим, что функция u в точке $x \in V - \mathcal{F}V$ имеет максимум. Опишем из точки x, как из центра, шаровую поверхность σ, лежащую целиком внутри области V. Радиус поверхности σ можно выбрать столь малым, чтобы было

$$u(x) > u_{н} + \varepsilon, \tag{18}$$

где $u_{н}$ — наибольшее значение u на σ, а $\varepsilon > 0$. Далее, можно найти такое достаточно малое число $\eta > 0$, чтобы для любой точки ξ, лежащей на или внутри поверхности σ, было

$$\eta\,|x-\xi|^2 < \frac{\varepsilon}{2},$$

где $|x-\xi|$ — расстояние между точкой x и точкой ξ. Тогда, в силу неравенства (18), функция

$$v(\xi) = u(\xi) + \eta\,|x-\xi|^2$$