деляющие их функции (коэффициенты уравнения и данные задачи). Обычно во всех внутренних точках изучаемой области они даже дифференцируемы неограниченное число раз. Это свойство решений граничных задач тесно связано с тем, что к граничным задачам приводит изучение установившихся (стационарных) физических процессов — равновесий, являющихся конечным результатом предшествующего процесса выравнивания. Из физических соображений очевидно, что при этом не только решения задачи, но и граничные условия, достаточно точно передающие природу явления, будут весьма гладкими.

§ 3. Гармонические функции

Говорят, что *в точке x функция $u(x)$ является гармонической* (или *гармонична*), если в этой точке она имеет непрерывные вторые производные и удовлетворяет уравнению Лапласа. Говорят, что *функция $u(x)$ является гармонической* (или *гармонична*) *в замкнутой области V*, если она

1) непрерывна в этой области,
2) гармонична во всех внутренних точках области,
3) когда область V бесконечна, стремится к нулю при стремлении точки x к бесконечно удаленной точке вдоль *любого* луча, принадлежащего области.

Отметим, что в силу этого определения регулярные решения граничных задач для уравнения Лапласа являются функциями, гармоническими в рассматриваемой области.

Установим некоторые важные свойства гармонических функций.

Теорема о максимуме и минимуме. Если функция $u(x)$ гармонична в области V, то она не имеет внутри этой области ни максимумов, ни минимумов, достигая своих наибольшего и наименьшего значений на ее границе.

Для доказательства предположим, что функция u в точке $x \in V - \mathcal{F}V$ имеет максимум. Опишем из точки x, как из центра, шаровую поверхность σ, лежащую целиком внутри области V. Радиус поверхности σ можно выбрать столь малым, чтобы было

$$u(x) > u_{н} + \varepsilon, \tag{18}$$

где $u_{н}$ — наибольшее значение u на σ, а $\varepsilon > 0$. Далее, можно найти такое достаточно малое число $\eta > 0$, чтобы для любой точки ξ, лежащей на или внутри поверхности σ, было

$$\eta |x-\xi|^2 < \frac{\varepsilon}{2},$$

где $|x-\xi|$ — расстояние между точкой x и точкой ξ. Тогда, в силу неравенства (18), функция

$$v(\xi) = u(\xi) + \eta |x-\xi|^2$$

в точке $\xi = x$ будет превосходить свое наибольшее значение на σ. Это означает, что ее максимум должен достигаться внутри поверхности σ. Но в точке максимума вторые производные по координатам точки ξ не могут быть больше нуля. Между тем

$$\Delta_\xi v = \frac{\partial^2 v}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \xi_2^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \xi_3^2} = \eta \Delta_\xi |x - \xi|^2 = 6\eta > 0.$$

Противоречие доказывает невозможность неравенства (18), откуда следует, что функция u внутри области V не может иметь максимума. Подобным же путем легко показать, что функция u не может иметь и минимума внутри V. Но как всякая непрерывная функция, она достигает своих наибольшего и наименьшего значений в области* (теорема *Вейерштрасса*). Так как это невозможно внутри области V, то эти значения достигаются функцией u на границе области.

Отметим полезное следствие. Если функции u и v гармоничны в области V, то выполнение на границе области одного из неравенств:

$$u \leqslant v \quad \text{или} \quad |u| \leqslant v$$

влечет за собой выполнение этого же неравенства и внутри области.

В самом деле, если функция $(u - v)$, гармоническая в области V, неположительна на границе области $(u - v \leqslant 0)$, то она неположительна и всюду в области, так как внутри области она не может превзойти свое значение на границе. Отсюда следует требуемое утверждение в отношении неравенства $u \leqslant v$. Неравенство же $|u| \leqslant v$ эквивалентно двум неравенствам: $u \leqslant v$, $-v \leqslant u$. По доказанному, выполнение каждого из них на границе влечет за собой их выполнение и внутри области. Отсюда следует требуемое утверждение и в отношении неравенства $|u| \leqslant v$.

Опираясь на теорему о максимуме и минимуме, докажем следующую *лемму об устранимой особенности*.

Пусть точка $\xi = x$ является изолированной особой точкой функции $u(\xi)$, а во всех точках некоторой окрестности Ω точки x функция $u(\xi)$ гармонична. Тогда либо при $\xi \to x$ функция $u(\xi)$ растет не медленнее, чем $\frac{1}{r}$, где $r = |x - \xi|$ — расстояние между точками x и ξ, либо функция $u(\xi)$ имеет в точке x устранимую особенность и может быть доопределена в этой точке так, чтобы она была в ней гармонична.

Выберем положительное число a настолько малым, чтобы шар $r \leqslant a$ целиком принадлежал окрестности Ω. В § 6, не опираясь на доказываемую лемму, мы покажем, что можно построить функцию, гармоническую в шаре и совпадающую на его поверхности с заданной непрерывной функцией. Обозначим через $v(\xi)$ функцию,

---

* См. В. И. Смирнов [1], т. I, п. 43.

гармоническую в шаре $r \leqslant a$ и принимающую на его поверхности те же значения, что и функция $u(\xi)$. Рассмотрим функцию

$$\frac{1}{r}-\frac{1}{a}.$$

Она неотрицательна в шаре $r \leqslant a$ и гармонична в области V_ε, которая получается, если исключить из шара $r \leqslant a$ произвольно малую окрестность $r \leqslant \varepsilon$ точки x. При $\xi \to x$ она растет как $\frac{1}{r}$. Поэтому, если функция $u(\xi)$ при $\xi \to x$ растет медленнее, чем $\frac{1}{r}$ (т. е. произведение $ru \to 0$ при $\xi \to x$), то существует такое число η, стремящееся к нулю вместе с ε, что

$$|u-v| \leqslant \eta\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{a}\right) \text{ при } r=\varepsilon \text{ и } r=a. \tag{19}$$

За η можно, например, принять наименьшее значение выражения

$$|u-v| \frac{ra}{a-r}$$

при $r=\varepsilon$. Так как функции $(u-v)$ и $\eta\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{a}\right)$ обе гармоничны в области V_ε, то, по доказанному выше следствию теоремы о максимуме и минимуме, неравенство (19) справедливо и при $\varepsilon \leqslant r \leqslant a$. Закрепим точку ξ, придав тем самым левой части неравенства (19), а также функции $\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{a}\right)$ некоторые фиксированные значения, и устремим радиус ε к нулю. При этом правая часть неравенства (19) будет стремиться к нулю, а так как его левая часть не зависит от ε, то при всех $\xi \neq x$ и $r \leqslant a$ должно быть $u=v$.

Итак, если функция $u(\xi)$ при $\xi \to x$ растет медленнее, чем $\frac{1}{r}$, то при $\xi \neq x$ она совпадает с ограниченной функцией v и, следовательно, ограничена при $\xi \neq x$. При этом, поскольку $u=v$ для всех $\xi \neq x$, то в особой точке $\xi = x$ можно положить: $u(x) \equiv v(x)$, т. е. точка x является для функции $u(\xi)$ *устранимой особой точкой*.

Таким образом, функция, гармоническая во всех точках области, за исключением некоторого числа изолированных точек x^i $(i=1, 2, 3, \ldots)$, в которых она имеет *неустранимую особенность*, растет при приближении к этим точкам не медленнее, чем $\frac{1}{|\xi-x^i|}$. Особых точек другого типа она не имеет. Примером функции, имеющей неустранимую особенность в точке x^i и гармонической во всех остальных точках пространства, может служить функция $\frac{1}{|\xi-x^i|}$.

Имея в виду, перейти к рассмотрению функций, гармонических в бесконечных областях, каждой точке x пространства поставим в соответствие точку ξ с координатами

$$\xi_i = x_i \frac{a^2}{|x|^2} \quad (i=1,\ 2,\ 3,\ |x|^2 \equiv x_1^2+x_2^2+x_3^2,\ a=\text{const}). \qquad (20)$$

Преобразование, выраженное формулами (20), называют *инверсией* относительно шаровой поверхности радиуса a с центром в точке $x=0$. Точки x и ξ называют *гармонически сопряженными* относительно указанной шаровой поверхности.

Так как отношения

$$\frac{\xi_i}{x_i} = \frac{a^2}{|x|^2} \quad (i=1,\ 2,\ 3)$$

имеют одинаковые значения при всех i, то обе гармонически сопряженные точки x и ξ лежат на одном луче, проведенном из точки $|x|=0$. Далее, вычислив с помощью формулы (20) расстояние $|\xi| = \sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2}$ точки ξ от начала луча, найдем, что $|\xi|\,|x|=a^2$.

Отсюда следует, что геометрия рассматриваемого преобразования такова, как если бы пространство отражалось в зеркальной поверхности Σ шара радиуса a с центром в точке $|x|=0$. При этом точки, лежащие на Σ, преобразуются сами в себя, а точки, лежащие вне (внутри) Σ, — в точки, лежащие внутри (вне) Σ. В частности, бесконечно удаленная точка преобразуется в точку $|x|=0$, а точка $|x|=0$ — в бесконечно удаленную точку. Легко показать, что при инверсии линии преобразуются в линии же, поверхности — в поверхности, области — в области. При этом бесконечные области преобразуются в области, содержащие начало координат, а области, содержащие начало координат — в бесконечные.

Так как свойство сопряженности двух точек взаимно, т. е. при инверсии они взаимно переходят друг в друга, то этим же свойством обладают и любые их множества. В частности, если область V при инверсии преобразуется в область V', то область V' — преобразуется в область V. Области V и V' будем называть *сопряженными* друг с другом.

Пусть V' — область, сопряженная с областью V при инверсии относительно шаровой поверхности единичного радиуса. Докажем *теорему Кельвина*: если функция $u(x)$ гармонична в области V, то функция

$$v(\xi) \equiv \frac{1}{|\xi|} u\left(\frac{\xi_1}{|\xi|^2},\ \frac{\xi_2}{|\xi|^2},\ \frac{\xi_3}{|\xi|^2}\right) \qquad (21)$$

гармонична в области V'.

Введем сферические координаты $r,\ \theta,\ \varphi$ с началом в точке $|x|=0$. При этом с точкой $x(r,\ \theta,\ \varphi)\in V$ будет гармонически сопряжена точка $\xi(r',\ \theta,\ \varphi)\in V'$, где $r'\equiv\frac{1}{r}$, вследствие чего выражение (21) примет вид:

$$v(r',\ \theta,\ \varphi) = ru(r,\ \theta,\ \varphi) = \frac{1}{r'} u\left(\frac{1}{r'},\ \theta,\ \varphi\right),\ r'\equiv\frac{1}{r}. \qquad (22)$$

Предположим сначала, что область V' не содержит точки $r'=0$. Подставив функцию v в уравнение Лапласа в сферических координатах [см. формулу (4)]:

$$\Delta_\xi v=\frac{\partial}{\partial r'}\left(r'^2\frac{\partial v}{\partial r'}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial v}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}=0, \qquad (23)$$

и приняв во внимание, что $\frac{\partial}{\partial r'}=\frac{\partial r}{\partial r'}\frac{\partial}{\partial r}=-\frac{1}{r'^2}\frac{\partial}{\partial r}=-r^2\frac{\partial}{\partial r}$, получим

$$\frac{\partial}{\partial r'}\left\{r'^2\frac{\partial}{\partial r'}\left[\frac{1}{r'}u\left(\frac{1}{r'},\ \theta,\ \varphi\right)\right]\right\}=r^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}[ru(r,\ \theta,\varphi)]=r\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right),$$

откуда

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}=0.$$

Так как функция u гармонична в области V, то это уравнение удовлетворяется тождественно, когда $x(r,\ \theta,\ \varphi)\in V$, т. е. когда $\xi(r',\ \theta,\ \varphi)\in V'$. Следовательно, функция $v(\xi)$ удовлетворяет уравнению Лапласа (23), когда $\xi\in V'$. При этом, как легко убедиться прямым дифференцированием, из существования и непрерывности производных функции $u(x)$ в области V вытекает существование и непрерывность производных того же порядка функции $v(\xi)$ в области V'. Тем самым, в предположении, что точка $r'=0$ не принадлежит области V', теорема доказана.

Предположим теперь, что точка $r'=0$ принадлежит области V'. Эта точка является для функции $v=\frac{1}{r'}\ u\ \left(\frac{1}{r'},\ \theta,\ \varphi\right)$ особой. Покажем, что это устранимая особая точка.

Пусть ξ' — произвольная точка области V', не совпадающая с точкой $r'=0$, а ω — шар с центром в точке $r'=0$ настолько малый, что точка ξ' лежит вне его. Тогда область $V'-\omega$ не содержит точки $r'=0$ и, по доказанному выше, функция v гармонична в ней и, в частности, гармонична в точке ξ'. Следовательно, функция v гармонична во всех точках некоторой окрестности точки $r'=0$, за исключением самой этой точки (где она не определена), и, по лемме об устранимой особенности, при $r'\to 0$ она либо остается ограниченной, либо растет не медленнее, чем $\frac{1}{r'}$. Однако последнее невозможно. Действительно, из соотношений (22) следует что

$$r'v(r',\ \theta,\ \varphi)=u\left(\frac{1}{r'},\ \theta,\ \varphi\right).$$

При $r'\to 0$ функция $u\left(\frac{1}{r'},\ \theta,\ \varphi\right)$ стремится к пределу, равному ее значению в бесконечно-удаленной точке. Но так как функция u, по условию, гармонична, то этот предел равен нулю и, следовательно, $\lim\limits_{r' \to 0} r'v = 0$. Таким образом, функция v в окрестности своей особой точки ограничена, значит, ее можно доопределить так, чтобы она была гармонична во всей области V'. Это завершает доказательство теоремы Кельвина.

Из теоремы Кельвина вытекает *лемма о поведении гармонической функции на бесконечности*: функция u, гармоническая в бесконечной области, удовлетворяет неравенствам:

$$|u(x)| < \frac{A}{|x|}, \quad \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right| < \frac{A}{|x|^2} \quad (i = 1, 2, 3, |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} > r_0), \tag{24}$$

где A и r_0 — надлежаще выбранные постоянные.

Действительно, пусть ξ — точка, гармонически сопряженная с точкой x. Функция $v(\xi) = |x| u(x)$ гармонична в точке $\xi = 0$ и некоторой ее окрестности $|\xi| < \varepsilon$ в силу теоремы Кельвина, а поэтому и ограничена там. Отсюда вытекает первое из неравенств (24) при $r_0 = \frac{1}{\varepsilon}$ и некотором значении $A > A_0$, где A_0 — наибольшее значение функции $|v(\xi)|$ при $|\xi| < \varepsilon$. Далее, заметив, что из равенств (20) при $a = 1$ следует формула

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial \xi_\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial \xi_\alpha} = \frac{1}{|x|^2} \frac{\partial}{\partial \xi_i} - \frac{2x_i}{|x|^3} \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{x_\alpha}{|x|} \frac{\partial}{\partial \xi_\alpha},$$

прямым дифференцированием получим

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{1}{|x|^2} \frac{\partial}{\partial \xi_i} |\xi| v(\xi) - \frac{2x_i}{|x|^3} \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{x_\alpha}{|x|} \frac{\partial}{\partial \xi_\alpha} |\xi| v(\xi) =$$

$$= \frac{1}{|x|^3} \frac{\partial v}{\partial \xi_i} + \frac{1}{|x|^2} \frac{\xi_i}{|\xi|} v - \frac{2x_i}{|x|^3} \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{x_\alpha}{|x|} \left[\frac{1}{|x|} \frac{\partial v}{\partial \xi_\alpha} + \frac{\xi_\alpha}{|\xi|} v\right].$$

Так как отношения $\frac{x_j}{|x|}$, $\frac{\xi_j}{|\xi|}$ $(j = 1, 2, 3)$, а также, в окрестности $|\xi| < \varepsilon$, функции v и $\frac{\partial v}{\partial \xi_j}$ ограничены, то существует такое число $A_i > 0$, что $\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right| < \frac{A_i}{|x|^2}$. Выбрав в качестве A наибольшее из чисел A_0, A_j $(j = 1, 2, 3)$, получим все неравенства (24).

ЗАДАЧИ

1. Показать, что если точка x гармонически сопряжена с точкой ξ, то и наоборот, точка ξ гармонически сопряжена с точкой x, т. е. свойство сопряженности взаимно.

2. Показать, что теорема Кельвина остается в силе при преобразовании инверсии общего вида:

$$\xi_i = y_i + \frac{a^2 (x_i - y_i)}{|x - y|^2} \quad (i = 1, 2, 3),$$

где y — произвольная фиксированная точка.

3. Показать, что инверсия представляет конформное отображение пространства, т. е. при инверсии сохраняются углы между кривыми.

Указание. Рассмотреть отображение элементов длин дуг.

4. Обобщить теорему о максимуме и минимуме на бесконечные области.

§ 4. Единственность решений граничных задач

Докажем единственность решения задачи Дирихле для уравнений Лапласа и Пуассона. Предположим, что задача Дирихле

$$\left.\begin{aligned} \Delta u &= f, \quad \text{когда} \quad x \in V - \mathcal{F}V, \\ u &= \psi, \quad \text{когда} \quad x \in \mathcal{F}V, \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

имеет два различных решения u_1 и u_2. Тогда разность $w = u_1 - u_2$ гармонична в области V и обращается в нуль на ее границе.

Если область V ограничена, можно непосредственно применить теорему о максимуме и минимуме. Внутри области V гармоническая функция w не может иметь значений ни бо́льших, ни меньших своего граничного значения, равного нулю. Поэтому она равна нулю и всюду внутри области, т. е. функции u_1 и u_2 внутри рассматриваемой области совпадают. Если область V бесконечна, воспользуемся теоремой Кельвина, построив функцию $w^*(\xi) \equiv |x| w(x)$, где ξ — точка с координатами $\xi_i \equiv \frac{x_i}{|x|}$. Функция $w^*(\xi)$ гармонична в ограниченной области V', сопряженной области V, и обращается на ее границе в нуль в силу граничного условия для функции w. Следовательно, по доказанному, она равна нулю, а поэтому равна нулю и функция $w(x) \equiv |\xi| w^*(\xi)$. Это завершает доказательство.

Так же просто доказывается непрерывная зависимость решения рассматриваемой задачи Дирихле от граничного условия. Пусть u_1 и u_2 — решения двух задач Дирихле для одной и той же области, граничные значения которых различаются не более чем на величину ε. При этом функция $w \equiv u_1 - u_2$ гармонична, а в точках границы области отличается от нуля не более, чем на ε. Если область V ограничена, то в силу теоремы о максимуме и минимуме функция $u_1 - u_2$ не может отличаться от нуля больше чем на ε и в любой точке внутри области. Следовательно, во всей области $|u_1 - u_2| \leqslant \varepsilon$, из чего и вытекает требуемое утверждение. Если область V бесконечна, но точка $|x| = 0$ не принадлежит области, то применив теорему Кельвина придем к функции $w^*(\xi) \equiv |x| w(x)$, гармонической в ограниченной области V', сопряженной области V. Граничные значения функции w^* не превосходят $A\varepsilon$, где A — наибольшее значение величины $|x|$ на границе $\mathcal{F}V$. Следовательно, по доказанному, $w^*(\xi) < A\varepsilon$, когда $\xi \in V'$. Отсюда $w(x) < \frac{A}{B}\varepsilon$, где B — наименьшее значение величины $|x|$ на границе $\mathcal{F}V$, и наше утверждение доказано. Когда точка $|x| = 0$ принадлежит области V, то до применения теоремы Кельвина можно сместить начало ко-