3. Показать, что инверсия представляет конформное отображение пространства, т. е. при инверсии сохраняются углы между кривыми.

Указание. Рассмотреть отображение элементов длин дуг.

4. Обобщить теорему о максимуме и минимуме на бесконечные области.

§ 4. Единственность решений граничных задач

Докажем единственность решения задачи Дирихле для уравнений Лапласа и Пуассона. Предположим, что задача Дирихле

$$\left.\begin{array}{ll} \Delta u = f, & \text{когда} \quad x \in V - \mathscr{F}V, \\ u = \psi, & \text{когда} \quad x \in \mathscr{F}V, \end{array}\right\} \tag{25}$$

имеет два различных решения u_1 и u_2. Тогда разность $w = u_1 - u_2$ гармонична в области V и обращается в нуль на ее границе.

Если область V ограничена, можно непосредственно применить теорему о максимуме и минимуме. Внутри области V гармоническая функция w не может иметь значений ни бóльших, ни меньших своего граничного значения, равного нулю. Поэтому она равна нулю и всюду внутри области, т. е. функции u_1 и u_2 внутри рассматриваемой области совпадают. Если область V бесконечна, воспользуемся теоремой Кельвина, построив функцию $w^*(\xi) \equiv |x| w(x)$, где ξ — точка с координатами $\xi_i \equiv \frac{x_i}{|x|}$. Функция $w^*(\xi)$ гармонична в ограниченной области V', сопряженной области V, и обращается на ее границе в нуль в силу граничного условия для функции w. Следовательно, по доказанному, она равна нулю, а поэтому равна нулю и функция $w(x) \equiv |\xi| w^*(\xi)$. Это завершает доказательство.

Так же просто доказывается непрерывная зависимость решения рассматриваемой задачи Дирихле от граничного условия. Пусть u_1 и u_2 — решения двух задач Дирихле для одной и той же области, граничные значения которых различаются не более чем на величину ε. При этом функция $w \equiv u_1 - u_2$ гармонична, а в точках границы области отличается от нуля не более, чем на ε. Если область V ограничена, то в силу теоремы о максимуме и минимуме функция $u_1 - u_2$ не может отличаться от нуля больше чем на ε и в любой точке внутри области. Следовательно, во всей области $|u_1 - u_2| \leqslant \varepsilon$, из чего и вытекает требуемое утверждение. Если область V бесконечна, но точка $|x| = 0$ не принадлежит области, то применив теорему Кельвина придем к функции $w^*(\xi) \equiv |x| w(x)$, гармонической в ограниченной области V', сопряженной области V. Граничные значения функции w^* не превосходят $A\varepsilon$, где A — наибольшее значение величины $|x|$ на границе $\mathscr{F}V$. Следовательно, по доказанному, $w^*(\xi) < A\varepsilon$, когда $\xi \in V'$. Отсюда $w(x) < \frac{A}{B}\varepsilon$, где B — наименьшее значение величины $|x|$ на границе $\mathscr{F}V$, и наше утверждение доказано. Когда точка $|x| = 0$ принадлежит области V, то до применения теоремы Кельвина можно сместить начало координат, после чего с помощью теоремы Кельвина снова придем к требуемому результату.

Чтобы рассмотреть задачу Неймана и смешанную задачу, обратимся к формуле Грина (7), гл. XVIII. Приняв во внимание тождество:

$$v\left(\frac{du}{dn}+\beta u\right)-u\left(\frac{dv}{dn}+\beta v\right)\equiv v\frac{du}{dn}-u\frac{dv}{dn}, \tag{26}$$

где β — произвольная непрерывная функция, и введя для сокращения письма обозначение:

$$\mathcal{P}\equiv\frac{d}{dn}+\beta, \tag{27}$$

приведем формулу Грина к виду:

$$\iint\limits_{\mathcal{F}V}\left(v\mathcal{P}u-u\mathcal{P}v\right)dS=\iiint\limits_{V}(v\Delta u-u\Delta v)\,dV, \tag{28}$$

где V — ограниченная область. Положив в этой формуле одну из входящих в нее функций равной 1, а вторую — равной квадрату гармонической функции w, придем к *формуле Дирихле*:

$$\iiint\limits_{V}\left[\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial x_3}\right)^2\right]dV=$$

$$=\iint\limits_{\mathcal{F}V}w\mathcal{P}w\,dS-\frac{1}{2}\iint\limits_{\mathcal{F}V}\beta w^2\,dS. \tag{29}$$

Воспользуемся ею, чтобы установить условия единственности решений внутренней смешанной задачи и внутренней задачи Неймана для уравнений Лапласа и Пуассона.

При обозначении (27), обе эти задачи могут быть записаны в единой форме:

$$\left.\begin{array}{lll}\Delta u=f, & \text{когда} & x\in V-\mathcal{F}V;\\ \mathcal{P}u=\psi, & \text{когда} & x\in\mathcal{F}V.\end{array}\right\} \tag{30}$$

При $\beta\not\equiv 0$ эта запись соответствует смешанной задаче, а при $\beta\equiv 0$ — задаче Неймана.

Предположим, что задача (30) имеет два различных решения u_1 и u_2, непрерывных в области V вместе со своими первыми производными. Тогда их разность $w=u_1-u_2$ явится решением однородной граничной задачи для уравнения Лапласа:

$$\Delta w=0,\quad \text{когда}\quad x\in V-\mathcal{F}V,\quad \mathcal{P}w=0,\quad \text{когда}\quad x\in\mathcal{F}V,$$

удовлетворяющим тем же условиям непрерывности. При этом, для $\beta\geqslant 0$, из формулы Дирихле следует, что

$$\iiint\limits_{V}\left[\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial x_3}\right)^2\right]dV\leqslant 0.$$

Так как все члены подынтегрального выражения неотрицательны, а само это выражение, по предположению, непрерывно, то должно быть $\frac{\partial w}{\partial x_i}=0$ $(i=1,\ 2,\ 3)$, т. е.

$$w=u_1-u_2=\text{const}.$$

Чтобы определить допускаемые значения постоянной в правой части этого равенства, обратимся к граничному условию рассматриваемой однородной задачи. Если $\beta\equiv 0$ (задача Неймана), то ему удовлетворяет любая постоянная. Следовательно, любая постоянная является решением однородной задачи Неймана, а поэтому *решение неоднородной задачи Неймана определяется с точностью до произвольного постоянного слагаемого.* Если же $\beta\neq 0$ хотя бы на части границы $\mathcal{F}V$, то эта постоянная равна нулю, т. е. *решение смешанной задачи единственно.*

К задаче Неймана обычно приводят физические проблемы, для которых появление постоянного слагаемого в решении либо несущественно (если выбор начала отсчета значений функции u может быть произвольным), либо это постоянное слагаемое определяется из дополнительных требований к поведению функции u на границе. Например, часто представляет интерес решение, среднее значение которого на границе области равно нулю. Это приводит к условию:

$$\iint\limits_{\mathcal{F}V} u\,dS=0. \tag{31}$$

Такое решение, очевидно, единственно.

Таким образом, дополнительные условия, делающие задачу Неймана поставленной корректно, могут устанавливаться в зависимости от конкретного содержания изучаемой физической проблемы.

Перейдем к внешним задачам.

Пусть V — бесконечная область с конечной границей $\mathcal{F}V$. Выделим из области V конечную часть V^*, лежащую внутри шаровой поверхности Σ, содержащей границу $\mathcal{F}V$ внутри себя. Применив в области V^* формулу Дирихле (29), получим

$$\iiint\limits_{V^*}\left[\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial x_3}\right)^2\right]dV=$$

$$=\iint\limits_{\mathcal{F}V} w\mathcal{P}\,w\,dS-\frac{1}{2}\iint\limits_{\mathcal{F}V}\beta w^2\,dS+\iint\limits_{\Sigma}\left(w\frac{dw}{dn}+\frac{1}{2}\,\beta w^2\right)dS.$$

Будем неограниченно увеличивать радиус поверхности Σ. В силу леммы о поведении гармонической функции на бесконечности, в окрестности бесконечно удаленной точки слагаемые $\left(\frac{\partial w}{\partial x_j}\right)^2$ убывают не медленнее, чем $\frac{1}{r^4}$, тогда как с ростом поверхности Σ объем области V^* возрастает лишь как r^3. Следовательно, интеграл по области V^* при этом сходится к несобственному интегралу по области V. Интеграл $\iint\limits_{\Sigma} w\frac{\partial w}{\partial n}\,dS$ с ростом радиуса поверхности Σ сходится к нулю, так как, в силу той же леммы, выражение $w\frac{\partial w}{\partial n}$ при этом убывает на Σ как $\frac{1}{r^3}$, в то время как площадь поверхности Σ растет лишь как r^2. Поскольку для нас представляют интерес значения функции β только на границе $\mathcal{F}V$, выберем β так, чтобы с ростом Σ интеграл $\iint\limits_{\Sigma}\beta w^2\,dS$ обращался в нуль. Осуществив предельный переход в написанном выше соотношении, придем к *формуле Дирихле для бесконечной области:*

$$\iiint\limits_{V}\left[\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial x_3}\right)^2\right]dV=$$

$$=\iint\limits_{\mathcal{F}V} w\mathcal{P}w\,dS-\frac{1}{2}\iint\limits_{\mathcal{F}V}\beta w^2\,dS. \qquad (32)$$

Эта формула полностью совпадает с формулой (29). Поэтому, по тем же соображениям, что и выше, придем к выводу, что при $\beta\geqslant 0$, разность $w=u_1-u_2$ двух решений u_1 и u_2 внешней граничной задачи:

$$\left.\begin{aligned}&\Delta u=f, \quad \text{когда} \quad x\in V-\mathcal{F}V,\\ &\mathcal{P}u\equiv\frac{\partial u}{\partial n}+\beta u=\psi, \quad \text{когда} \quad x\in\mathcal{F}V,\end{aligned}\right\} \qquad (33)$$

удовлетворяет соотношениям $\frac{\partial w}{\partial x_i}=0$ $(i=1,\ 2,\ 3)$, откуда следует, что $w=\mathrm{const}$. Постоянная в правой части последнего соотношения должна быть равна нулю как для внешней смешанной задачи, так и для внешней задачи Неймана, поскольку в бесконечно удаленной точке все гармонические функции имеют совпадающее значение, равное нулю. Таким образом, при $\beta\geqslant 0$, регулярное решение внешней задачи (33) единственно.

Коснемся теперь вопроса об условиях существования решений задачи Неймана для уравнения Лапласа. Положив в формуле Грина (7), гл. XVIII, $v=1$, $\Delta u=0$, получим

$$\iint\limits_{S}\frac{du}{dn}\,dS=0, \qquad (34)$$

где S — произвольная поверхность, являющаяся границей конечной области, в которой функция u гармонична. Отсюда следует, что граничное условие

$$\frac{du}{dn}=\psi, \quad \text{когда} \quad x\in\mathcal{F}V,$$

внутренней задачи Неймана для уравнения Лапласа не может быть задано произвольно, а должно удовлетворять соотношению:

$$\iint_{\mathcal{F}V} \psi \, dS = 0. \tag{35}$$

Этот результат допускает простое истолкование. Рассмотрим, например, температурное поле. Согласно принципу Фурье, количество тепла, текущего через элемент поверхности dS, пропорционально произведению $\frac{du}{dn} dS$, где $\frac{du}{dn}$ — производная температуры u по направлению нормали к элементу dS. Если температурное поле не меняется с течением времени, то общее количество тепла, проходящего через любую замкнутую поверхность, заключенную в пределах тела, равно нулю. Таким образом, соотношение (34) или (35) представляет условие стационарности поля.

Заметим, что свойство, выраженное соотношением (34), присуще только гармоническим функциям (см. задачу 1).

Условие (35) не распространяется, однако, на внешнюю задачу Неймана. Действительно, введем снова область V^*, которую мы рассматривали при выводе формулы Дирихле (32). Применив формулу (35) в области V^*, получим

$$\iint_{\mathcal{F}V} \frac{du}{dn} dS = -\iint_{\Sigma} \frac{du}{dn} dS.$$

Когда радиус поверхности Σ неограниченно растет, интеграл по Σ может не стремиться к нулю, так как из доказательства леммы о поведении гармонической функции на бесконечности вытекает, что подынтегральное выражение может убывать лишь как $\frac{1}{r^2}$, т. е. интеграл по Σ может не обращаться в нуль с ростом поверхности Σ. Следовательно, формула (34), а с ней и формула (35), не переносится на функции, гармонические в бесконечной области.

Вспомнив истолкование формулы (34), видим, что в рамках этого истолкования взаимодействие между средой в *бесконечной* области и внешним пространством следует считать происходящим не только на границе $\mathcal{F}V$ области, но и в *бесконечно удаленной точке*, вследствие чего равновесный баланс на границе $\mathcal{F}V$ может не соблюдаться.

ЗАДАЧИ

1. Пусть u — функция, имеющая в области V непрерывные производные первых двух порядков, причем

$$\iint_{S} \frac{du}{dn} dS = 0$$

при любом выборе замкнутой поверхности S, не выходящей за пределы V. Доказать, что функция u гармонична в области V.

Указание. Воспользоваться формулой Грина (7), гл. XVIII, положив в этой формуле $v=1$.

2. Доказать теорему о максимуме и минимуме с помощью формулы (34).

Указание. Воспользоваться тем, что на шаровой поверхности достаточно малого радиуса, окружающей точку максимума или минимума функции u, производная $\frac{du}{dn}$ сохраняет знак.

3. Опираясь на интегральную формулу Дирихле, доказать единственность решения задачи Дирихле.

4. Применив теорему о максимуме и минимуме к шару неограниченно большого радиуса, доказать теорему Лиувилля: функция, гармоническая во всем пространстве, тождественно равна нулю.

5. Опираясь на теорему Кельвина, показать, что внешняя задача Дирихле может быть сведена к внутренней.

§ 5. Фундаментальные решения уравнения Лапласа. Основная формула теории гармонических функций

Как мы видели в § 1, функция

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{\sqrt{\sum_{\alpha=1}^{3}(\xi_\alpha-x_\alpha)^2}}, \tag{36}$$

где ξ_j, x_j $(j=1, 2, 3)$ — координаты двух точек ξ и x, при $\xi\neq x$ удовлетворяет уравнению Лапласа. Так как выражение $\frac{1}{r}$ симметрично относительно координат точек ξ и x, это справедливо при дифференцировании по координатам как точки ξ, так и точки x. При $\xi=x$ функция $\frac{1}{r}$ испытывает бесконечный разрыв.

Если функция $\varphi(\xi, x)$ в области V гармонична по координатам точки ξ и непрерывна вместе со своими первыми производными, то функцию

$$L(\xi, x)=\frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{r}+\varphi(\xi, x)\right] \tag{37}$$

будем называть *фундаментальным решением уравнения Лапласа в области V*.

Используя свойства фундаментальных решений, можно вывести важные интегральные формулы, связывающие значение произвольной достаточно гладкой функции в какой-либо точке внутри или на границе области ее определения с совокупностью значений этой функции и ее нормальной производной на границе рассматриваемой области.

Рассмотрим сначала ограниченные области. Пусть V — такая область. Когда точка x лежит вне области V, фундаментальное решение $L(\xi, x)$ в этой области гармонично, вследствие чего, положив в формуле Грина (7), гл. XVIII,

$$v(\xi)=L(\xi, x),$$